

Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

1. februar 2016

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) (a) Zapišite splošno rešitev parcialne diferencialne enačbe

$$f_{xy}(x, y) + 2xf_y(x, y) = 0.$$

Namig: $g(x, y) = f_y(x, y)$.

(b) Zapišite Taylorjev polinom $T(x, y)$ druge stopnje za funkcijo

$$h(x, y) = e^{x^2-y^2} + x^2 - 3y^2,$$

razvit okrog točke $(1, 1)$.

2. (20) **(a)** Naj bodo $(x, y) \mapsto u(x, y)$, $(x, y) \mapsto v(x, y)$, $(u, v) \mapsto f(u, v)$ in $(u, v) \mapsto g(u, v)$ parcialno zvezno odvedljive funkcije, ki zadoščajo pogojem

$$u_x(x, y) = -v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = v_x(x, y),$$

$$g_v(u, v) = f_u(u, v), \quad g_u(u, v) = -f_v(u, v).$$

Za funkciji $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ in $G(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$ izračunajte

$$v(x, y) (G_x(x, y) - F_y(x, y)) - u(x, y) (G_y(x, y) + F_x(x, y)).$$

(b) Naj bo $(x, y) \mapsto H(x, y)$ dvakrat zvezno parcialno odvedljiva funkcija in naj bo $x \mapsto h(x)$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija. Definirajmo

$$\Phi(x) = H(x, h(x)).$$

Izrazite $\Phi''(x)$ z odvodi funkcije h in parcialnimi odvodi funkcije H .

3. (20) Izračunajte integral

$$\int_D (x + y \sin x) dx dy$$

kjer je D omejeno območje, ki ga omejujeta y os in parabola $4 - x = y^2$.

4. (20) Naj bo $R > 0$ in naj bo parametrizacija ploskve \mathcal{S} podana z

$$\vec{r}(u, v) = (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v), \quad u \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad v \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

(a) Zapišite enotsko normalo na ploskev \mathcal{S} v točki $T \left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{2}}{2} \right)$, z negativno x -komponento.

(b) Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x, y, z) = (x, 0, 0)$ skozi ploskev \mathcal{S} (za normalo izberite tisto z negativno x -komponento.)

5. (20) Naj bo G stožec z višino $h > 0$ in osnovno ploskvijo, ki leži v xy -ravnini in ima središče $S(0, 0, 0)$ ter polmer $R > 0$. Natančneje,

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h - \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Z \mathcal{S} označimo plašč stožca G (brez osnovne ploskve). Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x, y, z) = (x, x^2, z^2)$ skozi \mathcal{S} . Za normalo vzemite vektor, ki kaže iz telesa.