

Čas pisanja je 100 minut. Dovoljen je A4 list s formulami. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. **Naloge naj bodo na polah vidno označene.** Vsi odgovori morajo biti dobro utemeljeni.

Naloga 1 (20 točk). Funkciji $u(x, y)$ in $v(x, y)$ naj bosta dani z

$$u(x, y) = x + \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{in} \quad v(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Pokažite, da je $u_x(x, y) = v_y(x, y)$ in $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$ ter izračunajte $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y)$.

Namig: Premislite ali je res potrebno računati u_{xx} in u_{yy} .

Naloga 2 (20 točk).

a) (10 točk) Dani sta funkciji

$$f(x, y, z) = 2z \quad \text{in} \quad g(x, y, z) = 2x^2 - 3y^2 + z^2 - 2xz.$$

Izračunajte vse možne vezane ekstreme funkcije f pri pogoju $g(x, y, z) = 3$.

b) (10 točk) Naj funkcija $(x, t) \mapsto u(x, t)$ zadošča enačbi $c^2 u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t)$, kjer je c realno število. Za funkcijo

$$\Phi(x, y) = u(x, cy)$$

izračunajte $\Phi_{yy}(x, y) - \Phi_{xx}(x, y)$.

Naloga 3 (20 točk). Telo G naj bo oblike valjastega silosa s polmerom R , višino h valjastega dela in streho v obliki pokončnega stožca z naklonom $\pi/4$. V matematičnih oznakah je

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h + R - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Izračunajte $\int_G z(x^2 + y^2) dx dy dz$.

Naloga 4 (20 točk). Naj bo \mathcal{K} del krožnice:

$$\mathcal{K} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0\}$$

in naj bo $\vec{F}(x, y) = (xy, x - y)$. Izračunajte krivuljni integral vektorskega polja \vec{F} po krivulji \mathcal{K} od točke $(2, 0)$ do $(0, 2)$.

Namig: Krivuljo \mathcal{K} lahko parametrizirate s polarnimi koordinatami.

Naloga 5 (20 točk). Naj bo G telo, ki ga v krogelnih koordinatah opišemo z

$$G = \{(r, \varphi, \theta) : R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

Izračunajte pretok polja $\vec{F}(x, y, z) = (2x^2, xz + 3, -4yz)$ skozi površino \mathcal{S} telesa G . Za normalo v vsaki točki ploskve \mathcal{S} vzemite vektor, ki kaže iz telesa.

Veliko uspeha pri reševanju!