

Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

26. januar 2018

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vredne so zaporedoma 15, 20, 25, 15 in 25 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (15) Poišcite možne vezane ekstreme funkcije

$$f(x, y, z) = 4 + xy + yz$$

pri pogoju $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

2. (a) (10) Funkciji $(x, y) \mapsto F(x, y)$ in $(x, y) \mapsto G(x, y)$ naj bosta zvezno parcialno odvedljivi in naj zadoščata enakosti $F_x(x, y)G_x(x, y) + F_y(x, y)G_y(x, y) = 0$ za vse (x, y) . Naj bosta f in g takšni zvezno odvedljivi funkciji, da za vse x velja

$$F(x, f(x)) = 1 \text{ in } G(x, g(x)) = 1.$$

Izračunajte $f'(x) \cdot g'(x)$.

(b) (10) Zapišite splošno rešitev parcialne diferencialne enačbe

$$f_{xx}(x, y) = f_x^2(x, y).$$

Namig: $g(x, y) = f_x(x, y)$

3. (25) D naj bo presek območja znotraj elipse, kroga in spodnje polravnine. Natančneje,

$$D = \{(x, y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} \leq 1, (x - 2)^2 + y^2 \leq 9, y \leq 0\}.$$

Izračunajte

$$\int_D \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy.$$

Pomoč: narišite skico in upoštevajte, da je pozitivna rešitev kvadratne enačbe $r^2 - 4r \cos \varphi - 5 = 0$ enaka $r = 2 \cos \varphi + \sqrt{4 \cos^2 \varphi + 5}$, ter

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} dt = \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{in} \quad \int_{-2}^0 \sqrt{5+t^2} dt = 3 + \frac{5}{2} \ln \sqrt{5}.$$

4. (15) Telo G naj bo definirano z

$$G = \left\{ (x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 2 - \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\}.$$

Izračunajte

$$\int_G (x + 2) \, dx \, dy \, dz.$$

Namig: krogelne koordinate.

5. (25) Z ravninama $z = 0$ in $z = 4 - x - y$ izsekamo telo G iz neskončnega valja podanega s pogojem $x^2 + y^2 \leq 1$. Natančneje,

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 4 - x - y\}.$$

Ploskev \mathcal{S} naj bo del površine telesa G , ki sovpada s plaščem neskončnega valja (brez osnovnih ploskev telesa G). Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y, z)$ skozi ploskev \mathcal{S} . Normale naj kažejo navzven.

Pomoč: $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\varphi))$.