

2. kolokvij iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

6. januar 2017

B

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Naloge so 4, vredne so zaporedoma 25, 20, 20 in 35 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj	

1. (25) Dana je funkcija

$$f(x, y, z) = (x + 1)(y + 1)z \ln(x^2 + y^2) + z^2.$$

Utemeljite, da obstaja taka okolica U točke $(0, 2)$ in taka funkcija $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, da je $g(0, 2) = 1$ in $f(x, g(x, z), z) = 4$ za vse $(x, z) \in U$. Izračunajte še $g_x(0, 2)$ in $g_{xx}(0, 2)$.

2. (20) Naj bo G piramida omejena z ravnino $x - 2y + z = 2$ in koordinatnimi ravninami $x = 0$, $y = 0$ in $z = 0$. Izračunajte

$$\int_G (x + z) \, dx dy dz.$$

Namig: Za boljšo predstavo izračunajte presečišča ravnine $x - 2y + z = 2$ s koordinatnimi osmi.

3. (20) Krogu podanem z $x^2 + y^2 \leq 16$ odstranimo notranjost kroga podano z $x^2 + (y - 2)^2 < 4$. Območje D je presek tako dobljenega območja in desne polravnine. Natančneje,

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16, x^2 + (y - 2)^2 \geq 4, x \geq 0\}.$$

Izračunajte

$$\int_D x \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy.$$

4. (a) (15) Naj bo $R > 0$. Telo G naj bo presek krogle podane z $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, neomejenega stožca z vrhom v izhodišču $(0, 0, 0)$ in prvega oktanta. Natančneje,

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Izračunajte integral

$$\int_G xy \, dx dy dz.$$

Namig: krogelne koordinate in $\sin^3 \theta = (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta$.

(b) (20) Telo G_1 naj bo presek krogle podane z $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6$ in paraboloidom. Natančneje,

$$G_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 6, z \geq x^2 + y^2\}.$$

Izračunajte volumen telesa G_1 .

Namig: cilindrične koordinate in izračunajte presek sfere in robne ploskve paraboloida.