

2. kolokvij iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

12. januar 2018

A

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Naloge so 4, vsaka je vredna 25 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj	

1. (25) Naj bodo a, b, c, d pozitivna števila, $\alpha \in \mathbb{R}$ in

$$F(x, y) = a \ln x - bx + c \ln y - dy.$$

Naj bo $(\frac{a}{b}, y_0)$ takšna točka, za katero velja $y_0 > \frac{c}{d}$ in $F(\frac{a}{b}, y_0) = \alpha$. Pokažite, da v neki okolici U točke $\frac{a}{b}$ obstaja takšna funkcija $x \mapsto f(x)$, da velja $f(\frac{a}{b}) = y_0$ in $F(x, f(x)) = \alpha$ za vse $x \in U$. Pokažite tudi, da ima f v $\frac{a}{b}$ lokalni maksimum.

2. (25) Naj bo D presek kroga s polmerom 2 ter polravnin $x \geq 1$ in $y \geq 0$.
Natančneje,

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 1, y \geq 0\}.$$

Izračunajte

$$\int_D \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy.$$

3. (25) Naj bo $R > 0$ in naj bo telo G presek krogle s polmerom R in tretjega oktanta. Natančneje,

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0\}.$$

Izračunajte

$$\int_G (x^2 + y^2)y \, dx dy dz.$$

Pomoč: $\sin^4 \theta = \frac{1}{4}(\frac{3}{2} - 2 \cos(2\theta) + \frac{1}{2} \cos(4\theta))$.

4. (a) (12) Izračunajte krivuljni integral vektorskega polja $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, 2xy, yz)$ po krivulji \mathcal{K} podani s parametrizacijo $\vec{r}(t) = (3t, t^2, t)$ od točke $A(0, 0, 0)$ do točke $B(3, 1, 1)$.

(b) (13) Ploskev \mathcal{S} je podana s parametrizacijo

$$\vec{r}(u, v) = (\cos u - v, \sqrt{2} \sin u, \cos u + v), \quad u \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad v \in [0, 1].$$

Izračunajte površino ploskve \mathcal{S} .