FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 4

Pisni izpit

3. februar 2012

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

REŠITVE

1. (20) Naj bo za $0 \le x \le 1$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}\,.$$

a. (10) Razvijte funkcijo $f(x)$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[0,1]$. Utemeljite, da enakost velja za vse $x \in [0,1]$.

Rešitev: Ker je $f(x)$ polinom in je $f(0) = f(1)$, bo Fourierova vrsta funkcije $f(x)$ konvergirala proti $f(x)$ za vsak x. Po formuli so koeficienti enaki

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

in

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left(\frac{f(x)\sin(2\pi n x)}{2\pi n}\bigg|_0^1 - \frac{1}{2\pi n}\int_0^1 f'(x)\,\sin(2\pi n x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= -\frac{2}{2\pi n}\left(-\frac{f'(x)\cos(2\pi n x)}{2\pi n}\bigg|_0^1 + \frac{1}{2\pi n}\int_0^1 f''(x)\cos(2\pi n x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{2}{(2\pi n)^2}\,. \end{aligned}$$

Podobno se prepričamo, da je $b_n = 0$ za vse n. Torej je za $0 \le x \le 1$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} = \frac{2}{(2\pi)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi n x)}{n^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Konvergenca proti $f(x)$: 2 točki.*
- *a_0: 2 točki.*
- *Prva integracija per partes: 2 točki.*
- *Druga integracija p[er partes: 2 točki.*
- *b_n: 2 točki.*

b. (10) Kot znano privzemite, da je za $0 \le u \le 1$

$$f(u) = \frac{2}{(2\pi)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi n u)}{n^2}\,.$$

Utemeljite, da vrsta za $0 \le u \le 1$ enakomerno konvergira in jo torej lahko členoma integriramo na intervalu $[0,x]$. Integrirajte jo in izpeljite

$$\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12} = \frac{2}{(2\pi)^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi n x)}{n^3}\,.$$

Uporabite enakost za izračun vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots .$$

Rešitev: Enakomerna konvergenca je jasna, saj so vse vrsta majorizirana s konvergentno številsko vrsto. Enakost sledi, če integriramo na levi in členoma na desni. Vstavimo $x = 1/4$ in sledi

$$\frac{1}{128} = \frac{2}{(2\pi)^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} .$$

Sledi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32} .$$

Ocenjevanje:

- *Majoriziranje: 2 točki.*
- *Utemeljitev, da lahko členoma integriramo: 2 točki.*
- *Integracija: 2 točki.*
- *Izbira x: 2 točki.*
- *Vsota vrste: 2 točki.*

2. (20) Funkcija $F(x)$ naj bo dana kot integral s parametrom

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xy)\sin y}{y^2}\, e^{-y}\,\mathrm{d}y\,.$$

Kot znano upoštevajte, da je za vse a in $b \geq 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ay}{y}\, e^{-by}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arctg}(a/b)\,.$$

a. (10) Utemeljite, da je za $x \geq 0$ funkcija zvezna in za $x > 0$ zvezno odvedljiva. Pokažite, da je

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg}(x-1)\right)\,.$$

Namig: $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right)$.

Rešitev: Za $x \geq 0$ velja neenačba

$$\left|\frac{\sin(xy)\sin y}{y^2}\right| \leq x$$

zato na vsakem končnem intervalu za x integral enakomerno konvergira in je zato zvezna funkcija x. Izračunamo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin(xy)\sin y}{y^2}\, e^{-y}\right) = \frac{\cos(xy)\sin y}{y}\, e^{-y}\,.$$

Tudi ta funkcija je za vse x omejena z e^{-y}, zato integral enakomerno konvergira in ga lahko odvajamo pod integralskim znakom. Računamo

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \int_0^\infty \frac{\cos(xy)\sin y}{y}\, e^{-y}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin((x+1)y) - \sin((x-1)y)}{y}\, e^{-y}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin((x+1)y)}{y}\, e^{-y}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin((x-1)y)}{y}\, e^{-y}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg}(x-1)\right)\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Enakomerna konvergenca integrala: 2 točki.*
- *Enakomerna konvergenca integrala $f_x(,x,y)$: 2 točki.*
- *Utemeljitev zveznosti in zvezna odvedljivosti: 2 točki.*
- *Parcialno odvajanje: 2 točki.*
- *Poenostavitve in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte $F(x)$.

Rešitev: Z vstavljanjem v integral ugotovimo, da je $F(0) = 0$. Računamo z integriranjem per partes

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x F'(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x \left(\operatorname{arctg}(u+1) - \operatorname{arctg}(u-1)\right)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}(u+1)\operatorname{arctg}(u+1)\Big|_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{(u+1)\,\mathrm{d}u}{(u+1)^2+1} - \\
&\qquad -\frac{1}{2}(u-1)\operatorname{arctg}(u-1)\Big|_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{(u-1)\,\mathrm{d}u}{(u-1)^2+1} \\
&= \frac{1}{2}(x+1)\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\log\left(1+(u+1)^2\right)\Big|_0^x - \\
&\qquad -\frac{1}{2}(x-1)\operatorname{arctg}(x-1) + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\log\left(1+(u-1)^2\right)\Big|_0^x - \\
&= \frac{1}{2}(x+1)\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{2}(x-1)\operatorname{arctg}(x-1) - \\
&\qquad -\frac{1}{4}\log\left(1+(x+1)^2\right) + \frac{1}{4}\log\left(1+(x-1)^2\right)\ .
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *$F(0)$: 2 točki.*
- *Ideja s per partes: 2 točki.*
- *Prvi per partes: 2 točki.,*
- *Integriranje racionalne funkcije.: 2 točki.*
- *Vstavljanje in rezultat: 2 točki.*

3. (20) Funkciji $y(t)$ in $z(t)$ za $t \geq 0$ zadoščata enačbama

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2y(t) - z(t) + \sin t \\ z'(t) &= 4y(t) - 2z(t) + \cos t \end{aligned}$$

Predpostavite, da je $y(0) = 0$ in $z(0) = 0$.

a. (10) Pokažite, da velja

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}y(s) &= 2\mathcal{L}y(s) - \mathcal{L}z(s) + \tfrac{1}{1+s^2} \\ s\mathcal{L}z(s) &= 4\mathcal{L}y(s) - 2\mathcal{L}z(s) + \tfrac{s}{1+s^2} \end{aligned}$$

Rešitev: Uporabimo Laplaceovo transformacijo in upoštevamo pravila.

Ocenjevanje:

- *Transformacija prve enačbe: 2 točki.*
- *Transformacija druge enačbe: 2 točki.*
- *Upoštevanje pravila za odvode: 2 točki.*
- *Transformaciji* $\sin t$ *in* $\cos t$*: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Določite funkciji $y(t)$ in $z(t)$.

Rešitev: V prvem delu naloge smo dobili sistem enačb za Laplaceovi transformaciji. Rešimo sistem linearnih enačb in dobimo

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{2}{s^2(1+s^2)}$$

in

$$\mathcal{L}z(s) = \frac{s^2 - 2s + 4}{s^2(1+s^2)}$$

Leve strani razstavimo na parcialne ulomke in dobimo

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2}{1+s^2}$$

in

$$\mathcal{L}z(s) = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{3}{1+s^2} + \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s}$$

Preberemo

$$y(t) = 2t - 2\sin t$$

in

$$z(t) = -2 + 4t + 2\cos t - 3\sin t\,.$$

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da gre za sistem linearnih enačb: 2 točki.*
- *Rešitev sistema: 2 točki.*
- *Razvrstitev po parcialnih ulomkih: 2 točki.*
- *Inverzne Laplaceove transformacije: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Naj bo funkcija $f(t)$ za $a > 0$ dana kot

$$f(t) = e^{-a|t|}\,.$$

a. (10) Izračunajte $\mathcal{F}f(s)$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}f(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}\,e^{-its}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-at}\,\cos ts\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{e^{-at}}{a}\cos ts\Big|_0^\infty - \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-at}\,\sin ts\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a} - \frac{s}{a}\left(-\frac{e^{-at}}{a}\sin st\Big|_0^\infty + \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-at}\,\cos ts\,\mathrm{d}t\right)\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-at}\cos ts\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}a} - \frac{s^2}{a^2}\,\mathcal{F}f(s)\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$\mathcal{F}f(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a}{a^2+s^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Definicija Fourierove transformacije: 2 točki.*
- *Sodost: 2 točki.*
- *Meje integriranja: 2 točki.*
- *Per partes: 2 točki.*
- *Enačba za $\mathcal{F}f(s)$ in ezultat: 2 točki.*

b. (10) S pomočjo inverzne formule izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(st)\,\mathrm{d}s}{a^2+s^2}\,.$$

Rešitev: Fourierova transformacija iz prve točke je integrabilna, zato velja

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{its}\,\mathcal{F}f(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Ker je funkcija $f(t)$ povsod zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, velja ta enakost po točkah za vse t. Vstavimo in sledi

$$e^{-a|t|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{its}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{a}{a^2+s^2}\right)\mathrm{d}s\,.$$

Poenostavimo in dobimo

$$e^{-a|t|} = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ts}{a^2 + s^2} \, \mathrm{d}s \, .$$

Torej je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(st) \, \mathrm{d}s}{a^2 + s^2} = \frac{\pi}{a} e^{-a|t|} \, .$$

Ocenjevanje:

- *Inverzna formula: 2 točki.*
- *Upoštvanje integrabilnosti: 2 točki.*
- *Konvergenca inverzne formule po točkah: 2 točki.*
- *Sodost: 2 točki.*
- *Rezultat integrala: 2 točki.*

5. (20) Naj bo funkcija $H(x)$ dana kot integral s parametrom

$$H(x) = \int_0^1 \frac{\sin(xy)}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y\,.$$

a. (10) Kot znano privzemite, da je

$$\sin(xy) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(xy)^{2k-1}}{(2k-1)!}\,.$$

Pokažite, da je

$$H(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\,x^{2k-1}}{(2k-1)! \cdot \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\,.$$

Namig: Upoštevajte vrsto in zamenjajte vrstni red seštevanja in integriranja. Z uvedbo spremenljivke $y^2 = u$ se prepričajte, da je

$$\int_0^1 \frac{y^{2k-1}\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\Gamma(k)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\,.$$

Rešitev: Namesto $\sin xy$ *v integral vstavimo vrsto. Ker vrsta enakomerno konvergira za fiksen x lahko zamenjamo vrstni red integriranja in odvajanja. Sledi*

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} \int_0^1 \frac{y^{2k-1}\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

Sledimo namigu in računamo z novo spremenljiko $y^2 = u$, $2y\mathrm{d}y = \mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{y^{2k-1}\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} &= \int_0^1 \frac{u^{k-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}\sqrt{1-u}} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u^{k-1}\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u}} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(k, \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(k)\Gamma(1/2)}{\Gamma(k+1/2)}\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$H(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\,x^{2k-1}}{(2k-1)! \cdot \Gamma(k+1/2)}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Zamenjava vrstnega reda seštevanja in odvajanja: 2 točki.*

- *Nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Beta funkcija: 2 točki.*
- *Zveza med beta in gama funkcijo: 2 točki.*
- *Vstavljanje in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte
$$x^2H''(x)+xH'(x)+x^2H(x)\,.$$

Rešitev: Potenčna vrsta za $H(x)$ po prvem delu naloge konvergira za vse x, zato jo lahko poljubnokrat odvajamo. Dobimo
$$H'(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\,(2k-1)x^{2k-2}}{(2k-1)!\cdot\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}$$
in
$$H''(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!(2k-1)(2k-2)\,x^{2k-3}}{(2k-1)!\cdot\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\,.$$
Hitro se prepričamo, da konstantnega člena ni. Koeficient pri potenci x je
$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}=1\,.$$
Vse ostale potence, ki nastopajo, so lihe. Oglejmo si koeficient potence x^{2k-1}. Dobimo $\sqrt{\pi}/2$-krat izraz
$$\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!(2k-1)(2k-2)}{(2k-1)!\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}+\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!(2k-1)}{(2k-1)!\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}+$$
$$+\frac{(-1)^{k-2}(k-2)!}{(2k-3)!\Gamma\left(k-1+\frac{1}{2}\right)}\,.$$

Izpostavimo in dobimo, da je zgornji izraz enak
$$\frac{(-1)^{k-1}(k-2)!}{(2k-3)!\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{k-1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)}+\frac{k-1}{(2k-2)\left(k-\frac{1}{2}\right)}-1\right)\,.$$
V izrazu v oklepaju damo prva dva člena na skupni imenovalec in dobimo
$$\frac{k-1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)}+\frac{k-1}{(2k-2)\left(k-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2(k-1)}{(2k-1)}\cdot\left(1+\frac{1}{2k-2}\right)=\frac{2(k-1)(2k-1)}{(2k-1)(2k-2)}=1\,.$$
Sledi
$$x^2H''(x)+xH'(x)+x^2H(x)=x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Utemeljitev odvajanje: 2 točki.*
- *Prvi odvod: 2 točki.*
- *Drugi odvod: 2 točki.*
- *Člen pri x: 2 točki.*
- *Ostali členi: 2 točki.*