Teoretični del izpita iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

4. september 2014

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Vprašanj je 10, vsako je vredno 10 točk. Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Pri vsakem vprašanju je samo en pravilen odgovor, ki ga je potrebno nedvoumno obkrožiti. Na razpolago imate 30 minut.
Točkovanje:

- pravilno obkrožen odgovor: 10 točk
- neoznačen ali dvoumno označen odgovor: 0 točk
- nepravilno obkrožen odgovor: -5 točk

1. Vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$$

a. konvergira absolutno.

b. konvergira pogojno.

c. divergira.

d. nič od naštetega.

2. Če je $|a_n| \leq c_n$ za vse $n \geq 1$ in vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergira, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

a. lahko konvergira ali divergira.

b. konvergira pogojno.

c. konvergira absolutno.

d. divergira.

3. Velja

a. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ za vse $x \in \mathbb{R}$.

b. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\cdot 2} - \frac{x^4}{4\cdot 3\cdot 2} +$ za vse $x \in \mathbb{R}$.

c. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ za vse $x \in (-1, 1]$.

d. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\cdot 2} - \frac{x^4}{4\cdot 3\cdot 2} + \cdots$ za vse $x \in (-1, 1]$.

4. Dana je funkcija
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & ;\ x > 0 \\ 0 & ;\ x \leq 0 \end{cases}$$
Potem je Taylorjeva vrsta funkcije $f(x)$ okrog $a = 0$ je enaka

a. $f(x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$.

b. $f(x)$ samo za vse $x > 0$.

c. 0 samo za vse $x \leq 0$. Za $x > 0$ Taylorjeva vrsta funkcije $f(x)$ okrog $a = 0$ ne konvergira.

d. 0 za vse $x \in \mathbb{R}$.

5. Naj bo f zvezno odvedljiva funkcija na $[0,5]$. Potem je za primerno izračunane konstante b_n, $n \in \mathbb{N}$, in vse $x \in (0,5)$ Fourierov razvoj funkcije f po sinusih enak

a. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{5}\right)$,

b. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{5}\right)$,

c. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x)$,

d. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n x)$.

6. Splošna rešitev homogene linearne diferencialne enačbe petega reda

$$y^{(5)} + 4y^{(3)} + 4y' = 0$$

je enaka

a. $y_H = A + B\cos(\sqrt{2}x) + C\sin(\sqrt{2}x) + Ex\cos(\sqrt{2}x) + Fx\sin(\sqrt{2}x)$,

b. $y_H = Ae^x + Be^x\cos(\sqrt{2}x) + Ce^x\sin(\sqrt{2}x) + Ex\cos(\sqrt{2}x) + Fx\sin(\sqrt{2}x)$,

c. $y_H = Ae^x + B\cos(\sqrt{2}x) + C\sin(\sqrt{2}x) + Ex\cos(\sqrt{2}x) + Fx\sin(\sqrt{2}x)$,

d. $y_H = A + Ce^x\cos(x) + De^x\sin(x) + Exe^x\cos(x) + Fxe^x\sin(x)$.

7. Dana naj bo linearna diferencialna enačba s konstantnimi realnimi koeficienti

$$y'' + by' + cy = \sin(5x)\,.$$

Naj bo $-5i$ ničla karakterističnega polinoma. Partikularna rešitev enačbe je oblike

a. $y_p = A\sin(5x)$.

b. $y_p = A\cos(5x)$.

c. $y_p = A\cos(5x) + B\sin(5x)$.

d. $y_p = Ax\cos(5x) + Bx\sin(5x)$.

8. Naj bo pravokotnik D enak $D = [4,5] \times [1,4]$. Naj bo f taka zvezna funkcija na D, da je tudi f_y zvezna na D. Če je $u : [1,4] \to [4,5]$ zvezno odvedljiva funkcija in je $F(y) = \int_4^{u(y)} f(x,y)\, dx$, potem je F odvedljiva na $(1,4)$ in je

a. $F'(y) = \int_4^{u(y)} f_y(x,y)\, dx$ za vse $y \in (1,4)$.

b. $F'(y) = \int_4^{u(y)} f_y(x,y)\, dx + f(u(y),y) - f(4,y)$ za vse $y \in (1,4)$.

c. $F'(y) = \int_4^{u(y)} f_y(x,y)\, dx + f(u(y),y)u'(y)$ za vse $y \in (1,4)$.

d. $F'(y) = 0$ za vse $y \in (1,4)$.

9. Naj bo f takšna štirikrat zvezno odvedljiva funkcija na $[0,\infty)$, da so f, f',f'' in f''' eksponentno omejene na $[0,\infty)$. Potem za Laplaceovo transformacijo velja

a. $\mathcal{L}\left(f''''\right)(s) = s\mathcal{L}\left(f\right)(s) - s^3 f(0) - s^2 f'(0) - sf''(0) - f'''(0)$.

b. $\mathcal{L}\left(f''''\right)(s) = \mathcal{L}\left(f\right)(s) - s^3 f(0) - s^2 f'(0) - sf''(0) - f'''(0)$.

c. $\mathcal{L}\left(f''''\right)(s) = s^4\mathcal{L}\left(f\right)(s) - s^3 f(0) - s^2 f'(0) - sf''(0) - f'''(0)$.

d. $\mathcal{L}\left(f''''\right)(s) = s^4\mathcal{L}\left(f\right)(s)$.

10. Za funkcijo $y(x)$ naj za $x \geq 0$ velja

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0.$$

Označimo $Y(s) = \mathcal{L}y(s)$. Velja

a. $sY'(s) + (1+s^2)Y(s) = 0$.

b. $(1+s^2)Y'(s) + sY(s) = 0$.

c. $(1+s^2)Y'(s) + Y(s) = 0$.

d. $Y'(s) + sY(s) = 0$.

Namig: $\mathcal{L}\left(xy(x)\right)(s) = -\left(\mathcal{L}\left(y\right)\right)'(s)$, $\quad \mathcal{L}\left(y'\right)(s) = s\mathcal{L}\left(y\right)(s) - y(0)$,
$\mathcal{L}\left(y''\right)(s) = s^2\mathcal{L}\left(y\right)(s) - sy(0) - y'(0)$