

1. kolokvij iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

4. december 2013

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Naloge so 4, vsaka je vredna 25 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj	

1. (25) Pokažite, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ konvergira po točkah za vsak $x > 0$ in izračunajte

$$\int_{\ln 4}^{\ln 5} \left(\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} \right) dx.$$

Korake v izračunu natančno utemeljite.

2. (25) S pomočjo Taylorjevega razvoja zapišite integral

$$I(x) = \int_0^x \frac{\sin \sqrt{t}}{t} dt$$

v obliki funkcijske vrste (katere členi so večkratniki potenc izraza \sqrt{x}). Pri tem korake v izračunu natančno utemeljite. Nato približno izračunajte $I(1)$ s pomočjo prvih treh neničelnih členov dobljene vrste in ocenite absolutno vrednost napake pri tem izračunu (*namig za oceno napake: Leibnitz*).

3. (25) Izračunajte konvergenčni radij vrste $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$ in izračunajte njeno vsoto (zapišite vrsto z elementarnimi funkcijami).
Namig: Izpostavite x^{-2} in primerno odvajajte. V izračunu upoštevajte, da je za $x \in (-1, 1)$

$$\int x \ln(1-x) dx = \frac{1}{2}((x^2-1) \ln(1-x) - \frac{x^2}{2} - x) + C.$$

Utemeljite, da vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ in $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)}$ konvergirata in izračunajte njuni vsoti.

Namig: Izpeljite, da je $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$ in upoštevajte v izračunu.

4. (25) Funkcijo $f(x) = x|x|$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ razvijte v Fourierovo vrsto.

Namig: Je mogoče f soda, liha?

Kot znano privzemite, da je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$. V dobljeno Fourierovo vrsto vstavite $x = \frac{\pi}{2}$ in izračunajte vsoto vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$