

Izpit iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

9. februar 2018

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vredne so zaporedoma 20, 20, 25, 15 in 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + 4y' + 4y = 169e^{3x} \sin(x).$$

2. (20) Zapišite splošno rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb

$$x'(t) = 7x(t) + 10y(t) - 8z(t)$$

$$y'(t) = -x(t) + z(t)$$

$$z'(t) = 3x(t) + 6y(t) - 4z(t).$$

Namig: $\lambda_1 = -1$.

3. (12) Dana je enačba

$$y'(x) - \int_0^x y(t) \cos(x-t) dt = \cos x$$

pri pogoju $y(0) = 0$. Označite $Y(s) = \mathcal{L}(y(x))(s)$ in izračunajte $y(x)$.

Namig: konvolucija

(b) (13) Izračunajte (izrazite s fakulteto)

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2k}(x) dx$$

za vse $k \in \mathbb{N}$.

Namig: Lahko uporabite, da je

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2k}(x) dx = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^{2k}(x) dx \text{ in } 2 \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha(x) \cos^\beta(x) dx = B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right)$$

za $\alpha > -1$ in $\beta > -1$.

4. (15) Za $a > 0$ in $b > 0$ sta definirana integrala

$$F(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{a \cos^2 x + \sqrt{6} \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2\sqrt[4]{6}\sqrt{a}},$$

$$G(b) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4 \cos^2 x + b \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{4\sqrt{b}}.$$

Izračunajte integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(4 \cos^2 x + \sqrt{6} \sin^2 x)^2} dx.$$

Namig: Odvajajte F in G .

5. (a)(16) Ugotovite, kakšen je konvergenčni radij vrste

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$$

in izračunajte njeno vsoto.

(b) (4) Izračunajte vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{(n+2)2^n}.$$