

Izpit iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

10. februar 2017

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Zapišite splošno rešitev linearne diferencialne enačbe

$$y''(x) + 4y'(x) - 5y(x) = 9e^x \sin(3x).$$

2. (20) Zapišite splošno rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb

$$x'(t) = -x(t) + y(t)$$

$$y'(t) = -y(t) + 4z(t)$$

$$z'(t) = x(t) - 4z(t).$$

3. (20) Dana je enačba

$$xy(x) + \int_0^x y(t) \cos(x-t) dt = -3 \cos x.$$

Označite $Y(s) = \mathcal{L}(y(x))(s)$ in izračunajte $Y(s)$.

Namig in pomoč: $\mathcal{L}(xy(x))(s) = -(\mathcal{L}(y(x))(s))'$, konvolucija in rešite dobljeno linearno diferencialno enačbo.

4. (a) (12) Pokažite, da je

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n(n-1) \cdots 2 \cdot 1}{a^{n+1}}$$

za vse $a > 0$ in $n \in \mathbb{N}$ (enakomerne konvergence integralov v izračunu vam ni potrebno utemeljevati).

Namig in pomoč: Najprej izračunajte integral $\int_0^{\infty} e^{-ax} dx$ za $a > 0$, dobljeno večkrat odvajajte po a in uporabite matematično indukcijo.

(b) (8) Naj bo $(u, v) \mapsto f(u, v)$ parcialno zvezno odvedljiva funkcija. Izračunajte odvod funkcije

$$F(x) = \int_{x+2}^{x^2+3x} f(x+2, x^2-tx) dt$$

(izrazite njen odvod s parcialnima odvodoma f_u in f_v funkcije f in s funkcijo f).

5. (20) Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 3 & ; x \in [0, 1] \\ 2 - x & ; x \in (1, 2] \end{cases}$$

Zapišite Fourierovo vrsto F funkcije f in skicirajte graf funkcije F na intervalu $[-4, 4]$. Ali dobljena Fourierova vrsta konvergira enakomerno na \mathbb{R} ?