

Izpit iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

19. junij 2015

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) S pomočjo Taylorjevega razvoja zapišite funkcijo

$$I(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t^3}} dt$$

v obliki potenčne vrste za $x \in [0, 1]$. Pri tem korake v izračunu natančno utemeljite. Nato približno izračunajte $I(1)$ s pomočjo prvih treh neničelnih členov dobljene vrste in ocenite absolutno vrednost napake pri tem izračunu (*namig za oceno napake: Leibnitz*).

2. (20) Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & ; x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ x & ; x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \pi & ; x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Razvijte funkcijo $f(x)$ v Fourierovo vrsto $F(x)$ na $[-\pi, \pi]$ in skicirajte graf funkcije $F(x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$. Ali dobljena Fourierova vrsta konvergira enakomerno na realni osi?

3. (20) Rešite linearno diferencialno enačbo

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x} \cos(x)$$

pri pogojih $y(0) = 0$ in $y'(0) = 0$.

4. Funkcija $F(x)$ je definirana kot integral s parametrom

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(xy) \sin y}{y^2} e^{-y} dy.$$

Kot znano upoštevajte, da je za vse a in $b \geq 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ay}{y} e^{-by} dy = \operatorname{arctg}(a/b).$$

- a. (12) Utemeljite, da je za $x \geq 0$ funkcija zvezna in za $x > 0$ zvezno odvedljiva. Pokažite, da je

$$F'(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg}(x-1)).$$

Namig: Parcialno odvajanje pod integralom (utemeljite zakaj se to sme) in uporaba $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$.

- b. (8) Izračunajte $F(x)$.

Namig: Uporaba $F(x) = \int_0^x F'(t) dt$ in per partes za $\int \arctan(s) ds$.

5. (20) Funkciji $y(t)$ in $z(t)$ za $t \geq 0$ zadoščata enačbama

$$\begin{aligned}y'(t) &= 2y(t) - z(t) + \sin t \\z'(t) &= 4y(t) - 2z(t) + \cos t\end{aligned}$$

in pogoje $y(0) = 0$ in $z(0) = 0$. Izračunajte $x(t)$ in $y(t)$ (npr. z uporabo Laplaceove transformacije).