

## Izpit iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

24. avgust 2020

Ime in priimek: \_\_\_\_\_

Vpisna številka: \_\_\_\_\_

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vredne so po 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. Za  $x > 2$  je dana homogena linearna diferencialna enačba drugega reda

$$(x^2 - x^3)y''(x) + x^2y'(x) - 2y(x) = 0. \quad (*)$$

- (2) Preverite, da je  $y_1(x) = x^2$  rešitev zgornje enačbe.
- (8) Z nastavkom  $y(x) = x^2u(x)$  prevedite zgornjo enačbo na enačbo  $(x^2 - x)u''(x) + (3x - 4)u'(x) = 0$ .
- (10) Zapišite splošno rešitev prvotne enačbe (\*).

2. (20) Poiščite splošno rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb

$$y'(x) = y(x) + 3z(x) + 10e^{3x},$$

$$z'(x) = 2y(x) - 4z(x) - 2e^x - 26e^{3x}.$$

3. (20) S pomočjo Laplaceove transformacije rešite integralsko enačbo

$$y(x) + 3 \int_0^x y(t) e^{3(x-t)} dt = \frac{1}{2} (e^{3x} + e^{-3x})$$

za  $x \geq 0$ .

4. (20) Naj bo  $a$  realno število in  $(x, t) \mapsto f(x, t)$  dvakrat zvezno parcialno odvedljiva funkcija, ki zadošča enačbi  $f_{xx}(x, t) = -2f(x, t)$  za  $x \in (-1, 0)$  in  $t \in \mathbb{R}$ . Za funkcijo

$$F(x) = \int_x^{1-x} \cos(ax)f(x, t) dt$$

Izračunajte  $F''(x)$  (izrazite ga z  $F$ ,  $f$  in parcialnima odvodoma  $f_x$  in  $f_t$ ).

5. (20) S pomočjo Taylorjevega razvoja zapišite funkcijo

$$I(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t^3}} dt$$

v obliki potenčne vrste za  $x \in [0, 1]$ . Pri tem korake v izračunu natančno utemeljite. Nato približno izračunajte  $I(1)$  s pomočjo prvih treh neničelnih členov dobljene vrste in ocenite absolutno vrednost napake pri tem izračunu.