

Izpit iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

26. avgust 2019

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vredne so zaporedoma po 20, 20, 30, 15 in 15 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Zapišite splošno rešitev linearne diferencialne enačbe

$$y''' - y'' - 2y' = (12x - 5)e^{3x}.$$

2. (20) Z metodo lastnih vektorjev rešite sistem linearnih diferencialnih enačb

$$x'(t) = -x(t) + y(t)$$

$$y'(t) = -y(t) + 4z(t)$$

$$z'(t) = x(t) - 4z(t).$$

3. (17) Dana je enačba

$$xy(x) + \int_0^x y(t) \cos(x-t) dt = -3 \cos x.$$

Označite $Y(s) = \mathcal{L}(y(x))(s)$ in izračunajte $Y(s)$.

Namig in pomoč: $\mathcal{L}(xy(x))(s) = -(\mathcal{L}(y(x))(s))'$, konvolucija in rešite dobljeno linearno diferencialno enačbo.

(b) (13) Izračunajte

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2k}(x) dx$$

za vse $k \in \mathbb{N}$.

Namig: Lahko uporabite, da je

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2k}(x) dx = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^{2k}(x) dx \quad \text{in} \quad 2 \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha(x) \cos^\beta(x) dx = B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right)$$

za $\alpha > -1$ in $\beta > -1$.

4. (15) S pomočjo integralov

$$F(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{a \cos^2 x + \sqrt{6} \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2\sqrt[4]{6}\sqrt{a}},$$

$$G(b) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4 \cos^2 x + b \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{4\sqrt{b}}$$

izračunajte integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(4 \cos^2 x + \sqrt{6} \sin^2 x)^2} dx.$$

Namig: Odvajajte F in G .

5. (15) Izračunajte in zapišite konvergenčno območje vrste

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$$

in izračunajte njeno vsoto.