Izpit iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

27. januar 2017

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	**Točke**
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Zapišite splošno rešitev linearne diferencialne enačbe

$$y''' - 7y'' + 6y' = (14x - 9)e^{-x}.$$

2. (20) Zapišite splošno rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb

$$y'(x) + z(x) = e^x$$

$$z'(x) - 4y(x) = e^{3x}.$$

Namig : npr. s pomočjo prevedbe na d.e. 2.reda

3. Dana je diferencialna enačba

$$y'(x) - y(x) = \int_0^x (x-t)e^t \, dt, \qquad y(0) = -1$$

za $x \geq 0$. Označimo $Y(s) = \mathcal{L}(y)(s)$.

(a) (10) Pokažite, da je

$$Y(s) = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2(s-1)^2}.$$

Namig: konvolucija

(b) (10) Izračunajte $y(x)$.

4. **(a)** (12) Pokažite, da je

$$\int_0^1 t^x (\ln t)^k dt = \frac{(-1)^k \cdot k(k-1)\cdots 2\cdot 1}{(x+1)^{k+1}}$$

za vse $x \neq -1$ in $k \in \mathbb{N}$ (enakomerne konvergence integralov v izračunu vam ni potrebno utemeljevati).

Namig in pomoč: $(a^x)' = (a^x)\ln a$ *za* $a > 0$, $\int_0^1 t^x \ dt = \frac{1}{1+x}$ *za* $x \neq -1$ *in matematična indukcija.*

(b) (8) Naj bo $(u,v) \mapsto f(u,v)$ parcialno zvezno odvedljiva funkcija. Izračunajte odvod funkcije

$$F(x) = \int_{2x+3}^{x^2-4x} f(x, x^3 + tx)\, dt$$

(izrazite njen odvod s parcialnima odvodoma f_u in f_v funkcije f in s funkcijo f).

5. Naj bo
$$f(x) = \int_{-1}^{1} e^{\frac{x(1-u)}{2}}(1+u)\,du.$$

(a)(10) Pokažite, da je
$$f(x) = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)(n+2)}.$$

Namig: V izračunu substitucija $v = 1 - u$.

(b) (10) Izračunajte konvergenčni radij potenčne vrste iz točke (a) in pokažite, da je
$$xf''(x) + (3-x)f'(x) - f(x) = 0$$
na njenem konvergenčnem območju.