FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 4

1. kolokvij

28. november 2012

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Naj bo a dano število z $0 < a < 1$. Dana naj bo vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a^2}$$

a. (10) Pokažite, da vrsta konvergira.

Rešitev: Za $k \geq 2$ je

$$\frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{((k-1)+1)^2 - a^2} \leq \frac{1}{(k-1)^2}\,.$$

Vrsta iz zadnjih členov konvergira, zato konvergira tudi izhodiščna vrsta.

Ocenjevanje:

- *Izbira kriterija: 2 točki.*
- *Vstavljanje v kriterij: 2 točki.*
- *Ocene: 2 točki.*
- *Uporaba kriterija: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (15) Naj bo $a = 1/2$. Izračunajte delno vsoto s_n vrste in vrsto nato seštejte.

Namig: Prepričajte se, da je

$$\frac{1}{k^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}}$$

in si oglejte prvih nekaj členov vrste.

Rešitev: Sledimo namigu. Dobimo

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{3}{2}}\right) + \left(\frac{1}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{5}{2}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}}\right) \\
&= 2 - \frac{2}{2n+1}\,.
\end{aligned}$$

Sklepamo

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 2\,,$$

kar je po definiciji vsota vrste.

Ocenjevanje:

- *Razstavljanje: 3 točke.*
- *Prvih nekaj členov: 3 točke.*
- *Krajšanje: 3 točke.*
- *s_n: 3 točke.*
- *Limita in vsota: 3 točke.*

2. (25) Funkcija $H(x)$ naj bo dana s potenčno vrsto

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 4^k [k!]^2 x^{2k-1}}{[(2k)!]^2} = x - \frac{x^3}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{x^5}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} - \cdots$$

a. (10) Poiščite radij konvergence potenčne vrste in izračunajte $H'(x)$ in $H''(x)$.

Rešitev: V vrsti imamo samo člene z lihimi potencami. Izračunamo

$$\left| \frac{c_{2k+1}}{c_{2k-1}} \right| = \frac{1}{(2k+1)^2} \to 0\,,$$

ko $k \to \infty$. Potenčna vrsta konvergira za vse $x \in \mathbb{R}$. Ker potenčne vrste lahko členoma odvajamo, dobimo

$$H'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 4^k [k!]^2 (2k-1) x^{2k-2}}{[(2k)!]^2} = 1 - \frac{x^2}{1^2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5} - \cdots$$

in

$$H''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 4^k [k!]^2 (2k-1)(2k-2) x^{2k-3}}{[(2k)!]^2} = -\frac{2x}{1^2 \cdot 3} + \frac{4x^4}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5} - \cdots$$

Ocenjevanje:

- *Kvocient: 2 točki.*
- *Limita: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*
- *$H'(x)$: 2 točki.*
- *$H''(x)$: 2 točki.*

b. (15) Izračunajte

$$x^2 H''(x) + xH'(x) + x^2 H(x)\,.$$

Namig: Posebej izračunajte koeficient pri x.

Rešitev: Ker vedno množimo z x, konstantnega člena ni. Koeficient pri x dobimo samo iz izraza $xH'(x)$. Ugotovimo, da je koeficient enak 1. V izrazu bodo samo lihe potence. Oglejmo si koeficient pri x^{2k-1} za $k > 1$. Če označimo koeficiente v vrsti za $H(x)$ s $c_1, c_3, \ldots$, dobimo za koeficient pri x^{2k-1}

$$(2k-1)(2k-2)c_{2k-1} + (2k-1)c_{2k-1} + c_{2k-3} = (2k-1)^2 c_{2k-1} + c_{2k-3}\,.$$

Vstavimo, da je

$$c_{2k-1} = \frac{(-1)^{k+1}}{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2k-1)^2}\,.$$

Sledi, da je koeficient pri x^{2k-1} *enak*

$$(2k-1)^2 \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2k-1)^2} + \frac{(-1)^k}{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2k-3)^2}\,.$$

Izpostavimo $(-1)^{k+1}$ *in sledi, da je koeficient*

$$\frac{(-1)^{k+1}}{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2k-3)^2}\left(\frac{(2k-1)^2}{(2k-1)^2} - 1\right) = 0\,.$$

Sledi

$$x^2 H''(x) + xH'(x) + x^2 H(x) = x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ni konstanega člena: 3 točke.*
- *Koeficient pri* x*: 3 točke.*
- *Izraz za koeficient pri* $2k-1$*: 3 točke.*
- *Vstavljanje in poenostavitev: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

3. (25) Kot znano privzemite, da je

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} .$$

Potenčna vrsta konvergira za vse $x \in \mathbb{R}$.

a. (10) Pokažite, da velja

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x \cos u)\, \mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^{2k-1} u \, \mathrm{d}u .$$

Utemeljite vaše korake.

Rešitev: Integrand razvijemo v vrsto. Dobimo

$$\sin(x \cos u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} \cdot \cos^{2k-1} u .$$

Ta vrsta na intervalu $[0, \pi/2]$ *enakomerno konvergira, saj je majorizirana s konvergentno vrsto*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\pi/2|^{2k-1}}{(2k-1)!} .$$

Zamenjamo lahko vrstni red integriranja in odvajanja in dobimo zgornji izraz.

Ocenjevanje:

- *Razvoj v vrsto: 2 točki.*
- *Ideja, da moramo pokazti enakomerno konvergenco: 2 točki.*
- *Majoriziranje: 2 točki.*
- *Sklep o zamenjavi vrstnega reda: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Kot znano privzemite rekurzivno formulo

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2k-1} u \, \mathrm{d}u = \frac{2k-2}{2k-1} \int_0^{\pi/2} \cos^{2k-3} u \, \mathrm{d}u \, , k > 1.$$

Pokažite, da je

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x \cos u)\, \mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 4^k [k!]^2 x^{2k-1}}{[(2k)!]^2} = x - \frac{x^3}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{x^5}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} - \cdots$$

Namig:

$$(2k-1)(2k-3) \cdot \cdots \cdot 1 = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}$$

in

$$(2k-2)(2k-4) \cdots 2 = 2^{k-1}(k-1)! \, .$$

Rešitev: Z uporabo rekurzivne formule dobimo

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2k-1} u \, \mathrm{d}u = \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \frac{2k-4}{2k-3} \cdots \frac{2}{3} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos u \, \mathrm{d}u \, .$$

Sledi

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2k-1} u \, \mathrm{d}u = \frac{2^{k-1}(k-1)! \cdot 2^k k!}{[(2k)!]} \, .$$

Koeficient pri potenci x^{2k-1} je

$$\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} \cdot \frac{2^{k-1}(k-1)! \cdot 2^k k!}{[(2k)!]} \, .$$

Števec in imenovalec pomnožimo z $2k$. Za koeficient dobimo

$$\frac{(-1)^{k+1} 4^k [k!]^2}{[(2k)!]^2} \, .$$

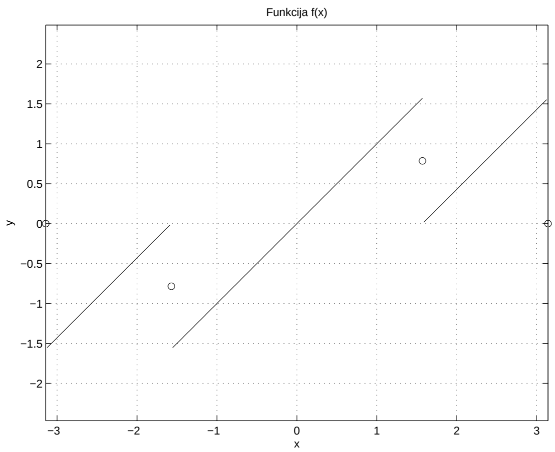
Ocenjevanje:

- *Uporaba rekurzivne formule: 3 točke.*
- *Uporaba namiga: 3 točke.*
- *Vstavljanje: 3 točke.*
- *Poenostavljanje: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

4. (25) Funkcija $f(x)$ naj bo periodična s periodo 2π in naj bo na $[-\pi, \pi]$ dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x = -\pi \\ x + \frac{\pi}{2} & \text{za } -\pi < 0 < -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{4} & \text{za } x = -\pi/2 \\ x & \text{za } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{4} & \text{za } x = \pi/2 \\ x - \frac{\pi}{2} & \text{za } \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ 0 & \text{za } x = \pi \end{cases}$$

Funkcija je na Sliki 1.



Sl. 1 Funkcija $f(x)$.

a. (15) Izračunajte Fourierove koeficiente funkcije $f(x)$ in utemeljite, da je funkcija v vsaki točki enaka svoji Fourierovi vrsti.

Rešitev: Opazimo, da je funkcija liha, zato je $a_k = 0$ za $k = 0, 1, 2 \ldots$. Računamo

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi/2} x\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2}\frac{\cos nx}{n}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos n\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\left(\cos n\pi - \cos(n\pi/2)\right)\right) \\
&= \frac{-2\cos n\pi + \cos n\pi - \cos(n\pi/2)}{n} \\
&= \frac{1}{n}\left((-1)^{n+1} - \cos(n\pi/2)\right) .
\end{aligned}$$

Funkcija je odsekoma zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva. V vsaki točki poleg tega velja $(f(x+) + f(x-))/2 = f(x)$, zato Fourierova vrsta v vsaki točki konvergira proti $f(x)$.

Ocenjevanje:

- *Lihost: 3 točke.*
- *Razdelitev integrala: 3 točke.*
- *Prvi integral: 3 točke.*
- *Drugi integral: 3 točke.*
- *b_n: 3 točke.*

b. (10) Ugotovite, proti kateri vrednosti konvergira Fourierova vrsta za $x = \pi/2$ in uporabite rezultat za izračun vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Rešitev: Iz prvega dela razberemo, da je vsota Fourierove vrste enaka $\pi/4$. Ugotovimo, da je $\sin(n\pi/2)$ za sode n enak 0, če pa je $n = 2k-1$ liho število, je $\sin((2k-1)\pi/2) = (-1)^{k+1}$. V Fourierovi vrsti za $x = \pi/2$ so tako samo členi za lihe n, ki menjavajo predznak. Izračunamo

$$b_{2k-1} = \frac{(-1)^{2k} - \cos((2k-1)\pi/2)}{2k-1} = \frac{1}{2k-1}\,,$$

ker je $\cos((2k-1)\pi/2) = 0$. *Sledi*

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Vsota za* $\pi/2$*: 2 točki.*
- *Sinusi za* $\pi/2$*: 2 točki.*
- *Koeficienti za lihe* n*: 2 točki.*
- *Vstavljanje v vrsto: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*