

## Izpit iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

29. junij 2018

Ime in priimek: \_\_\_\_\_

Vpisna številka: \_\_\_\_\_

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vredne so po 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Zapišite splošno rešitev linearne diferencialne enačbe

$$y''' - y'' - 2y' = (5 - 12x)e^{3x}.$$

2. (20) Funkciji  $y(t)$  in  $z(t)$  za  $t \geq 0$  zadoščata enačbama

$$\begin{aligned}y'(t) &= 2y(t) - z(t) + \sin t \\z'(t) &= 4y(t) - 2z(t) + \cos t\end{aligned}$$

in pogoje  $y(0) = 0$  in  $z(0) = 0$ . Izračunajte  $y(t)$  in  $z(t)$ .

*Nasvet: sistem prevedite v diferencialno enačbo za funkcijo  $y$ .*

3. (a) (12) Dana je enačba

$$y'(x) - xy(x) = 4 \int_0^x y(t)e^{3(x-t)} dt$$

pri pogoju  $y(0) = 0$ . Označite  $Y(s) = \mathcal{L}(y(x))(s)$  in izračunajte  $Y(s)$ .

*Namig in pomoč: konvolucija; uporabite Laplaceovo transformacijo in rešite dobljeno diferencialno enačbo.*

(b) (8) Naj bo  $f(x) = \cos(x)$ . Izračunajte  $(f * f)(x)$ .

*Namig: Lahko uporabite npr. Laplaceovo transformacijo, enakost  $s^2 = s^2 + 1 - 1$  in znano enakost  $\mathcal{L}(\frac{1}{2}(\sin x - x \cos x))(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$ .*

4. (20) Za  $x > 0$  naj bo

$$F(x) = \int_0^x (5x - 2t)f(t) dt,$$

kjer je  $f$  zvezno odvedljiva funkcija na  $[0, \infty)$ . Pokažite, da je za vse  $x > 0$

$$F''(x) = 8f(x) + 3xf'(x).$$

Poiščite vse takšne funkcije  $f$ , da bo  $F''(x) = 0$  za vse  $x > 0$ .

5. (20) Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & ; x \in [0, 1) \\ 1 & ; x \in [1, 2] \end{cases}$$

Razvijte funkcijo  $f(x)$  v Fourierovo vrsto  $F(x)$  **po sinusih** na  $[0, 1) \cup (1, 2]$  in skicirajte graf funkcije  $F(x)$  za vse  $x \in [-6, 6]$ . Bodite natančni pri  $x \in \mathbb{Z}$ .

*Namig: Razširite  $f$  do lihe funkcije na  $[-2, 2]$ .*