FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 4

Pisni izpit

30. avgust 2013

Ime in priimek: ______________________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo

$$F(x) = \int_{-1}^{1} e^{\frac{x}{2}(1-u)}(1+u)\,\mathrm{d}u\,.$$

a. (10) Pokažite, da je

$$F(x) = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)(n+2)}\,.$$

Rešitev: Za omejene x vrsta

$$e^{\frac{x}{2}(1-u)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(1-u)^n}{2^n \cdot n!}$$

enakomerno konvergira. Zato lahko zamenjamo vrstni red seštevanja in integriranja. Dobimo

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^{1} e^{\frac{x}{2}(1-u)}(1+u)\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n!}\int_{-1}^{1}(1-u)^n(1+u)\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n!}\int_{0}^{2} v^n(2-v)\,\mathrm{d}v \\ &= 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)(n+2)}\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Razvoj eksponentne funkcije: 2 točki.*
- *Enakomerna konvergenca: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Preurejanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte radij konvergence potenčne vrste

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)(n+2)}$$

in izračunajte

$$xF''(x) + (3-x)F'(x) - F(x)\,.$$

Rešitev: Prepričamo se, da je

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3} = 0\,.$$

Vrsta torej konvergira za vse $x \in \mathbb{R}$ in jo lahko členoma odvajamo. Dobimo

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!(n+1)(n+2)}$$

in

$$F''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!(n+1)(n+2)} .$$

Konstantni člen v izrazu je

$$\frac{3}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2} = 0 .$$

Vstavimo in zberemo koeficiente pri potenci x^n. Po izpostavljanju dobimo

$$\frac{1}{(n-1)!(n+2)} \left(\frac{1}{n+3} + \frac{3}{n(n+3)} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} \right) .$$

Izraz seštejemo in dobimo, da je koeficient enak 0.

Ocenjevanje:

- *Konvergenčni radij: 2 točki.*
- *F': 2 točki.*
- *F'': 2 točki.*
- *Konstantni koeficient: 2 točki.*
- *Zbiranje pri x^n in sklep: 2 točki.*

2. (20) Funkcija $f(x)$ naj bo periodična s periodo 2π in naj za $-\pi \leq x < \pi$ velja

$$f(x) = \cos x + |\cos x|\,.$$

a. (10) Zapišite Fourierovo vrsto za funkcijo $f(x)$ in ugotovite, za katere $x \in [-\pi, \pi]$ Fourierova vrsta konvergira proti funkcijski vrednosti $f(x)$.

Rešitev: Ugotovimo, da je funkcija soda, torej bo $b_n = 0$ *za vse* $n = 1, 2, \ldots$. *Funkcija* $f(x)$ *je različna od* 0 *le na intervalu* $[-\pi/2, \pi/2]$ *in je tam enaka* $2\cos x$. *Računamo*

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\,,$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \,\mathrm{d}x = 1$$

in za $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos nx \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(\cos(n+1)x + \cos(n-1)x\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{2\pi}\left(\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(n+1)\pi/2}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\pi/2}{n-1}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(n\pi/2)}{n+1} - \frac{\cos(n\pi/2)}{n-1}\right) \\
&= -\frac{4\cos(n\pi/2)}{\pi(n^2-1)}\,.
\end{aligned}$$

Funkcija $f(x)$ *je zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, zato Fourierova vrsta konvergira za vsak* x *proti funkciji* $f(x)$. *Torej je*

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \cos x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4\cos(n\pi/2)\cos nx}{\pi(n^2-1)}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Sodost: 2 točki.*
- a_0, a_1*: 2 točki.*
- a_n*: 2 točki.*
- *Vrsta: 2 točki.*
- *Konvergenca: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte vsoto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}\,.$$

Rešitev: V Fourierovo vrsto vstavimo $x = \pi/2$. *Za lihe* n *dobimo* 0, *za sod* $n = 2k$ *pa dobimo enakost*

$$0 = f\left(\pi/2\right) = \frac{2}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi((2k)^2 - 1)}\,.$$

Na desni je vrsta, ki jo moramo izračunati. Sledi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *x: 2 točki.*
- *Samo sodi členi: 2 točki.*
- *Uporaba konvergence: 2 točki.*
- *Izenačenje: 2 točki.*
- *Končna vsota: 2 točki.*

3. (20) Dana naj bo linearna diferencialna enačba drugega reda

$$y'' + \frac{1}{4x^2}\, y = g(x)$$

na intervalu $[1, \infty)$.

a. (10) Pokažite, da sta funkciji $y_1(x) = \sqrt{x}$ in $y_2(x) = \sqrt{x}\log x$ linearno neodvisni rešitvi homogene enačbe.

Rešitev: Računamo

$$y_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{in} \qquad y_1''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}\,,$$

ter

$$y_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\log x}{2\sqrt{x}} \qquad \text{in} \qquad y_2''(x) = -\frac{\log x}{4x^{3/2}}\,.$$

To, da sta obe funkciji rešitvi homogene enačbe, preverimo z vstavljanjem. Zlahka tudi izračunamo

$$W(x) = 1\,,$$

tako da sta rešitvi linearno neodvisni na $[1, \infty)$.

Ocenjevanje:

- *Prvi odvodi: 2 točki.*
- *Drugi odvodi: 2 točki.*
- *Vstavljanje prve rešitve: 2 točki.*
- *Vstavljanje druge rešitve: 2 točki.*
- *Linearna neodvisnost: 2 točki.*

b. (10) Rešite enačbo, če je $g(x) = 1/x^{3/2}$ in funkcija y zadošča začetnima pogojema $y(1) = y'(1) = 0$.

Rešitev: Po formuli je partikularna rešitev

$$y_p(x) = -y_1(x)\int_1^x \frac{y_2(u)g(u)}{W(u)}\,\mathrm{d}u + y_2(x)\int_1^x \frac{y_1(u)g(u)}{W(u)}\,\mathrm{d}u\,.$$

V konkretnem primeru dobimo

$$y_p(x) = -\sqrt{x}\int_1^x \frac{\log u}{u}\,\mathrm{d}u + \sqrt{x}\log x\int_1^x \frac{1}{x}\,\mathrm{d}u\,.$$

Integracija nam da

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x}\log^2 x + \sqrt{x}\log^2 x = \frac{1}{2}\sqrt{x}\log^2 x\,.$$

Splošna rešitev enačbe je

$$y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}\log^2 x + c_1\sqrt{x} + c_2\sqrt{x}\log x\,.$$

Iz začetnih pogojev sledi

$$0 = y(1) = c_1 \qquad \textit{in} \qquad 0 = y'(1) = \frac{c_1}{2} + c_2\,.$$

Sledi $c_1 = 0$ *in* $c_2 = 0$. *Končna rešitev je*

$$y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}\log^2 x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Formula: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Enačbi za konstante: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

4. (20) Dana naj bo diferencialna enačba

$$y''' - 2y'' + 10y' = 3xe^x \,.$$

a. (10) Poiščite partikularno rešitev zgornje enačbe.

Rešitev: Karakteristični polinom enačbe je

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 10\lambda = 0$$

z ničlami $\lambda = 0$, $\lambda = -1 + 3i$ *in* $-1 - 3i$. *Ker* $\lambda = 1$ *ni ničla karakterističnega polinoma, je nastavek za partikularno rešitev* $y_p(x) = (Ax + B)e^x$. *Odvajamo in dobimo*

$$y_p' = e^x\,(Ax + A + B) \quad y_p'' = e^x(Ax + 2A + B) \quad in \quad y''' = e^x(Ax + 3A + B)\,.$$

Vstavimo v enačbo in dobimo

$$e^x\big(Ax + 3A + B - 2(Ax + 2A + B) + 10(Ax + A + B)\big) = 3xe^x\,.$$

Pokrajšamo e^x *in sledi* $9A = 3$, *torej* $A = 1/3$ *in* $9A + 9B = 0$, *torej* $B = -1/3$. *Sledi*

$$y_p(x) = \frac{1}{3}(x-1)\,e^x\,.$$

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom in ničli: 2 točki.*
- *Nastavek: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Enačbe za konstante: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

b. (10) Poiščite rešitev diferencialne enačbe, ki ustreza začetnim pogojem $y(0) = -1/3$, $y'(0) = 0$ in $y''(0) = 1/3$.

Rešitev: Splošna rešitev zgornje enačbe je

$$y(x) = c_1 + c_2e^x \sin 3x + c_3e^x \cos 3x + \frac{1}{3}(x-1)\,e^x\,.$$

Iz začetnih pogojev sledijo enačbe

$$\begin{array}{lclcl} -\frac{1}{3} & = & y(0) & = & c_1 + c_3 - \frac{1}{3} \\ 0 & = & y'(0) & = & 3c_2 + c_3 \\ \frac{1}{3} & = & y''(0) & + & 6c_2 - 8c_3 + \frac{1}{3} \end{array}$$

Iz zadnjih dveh enačb dobimo $c_2 = c_3 = 0$. *Iz prve enačbe sledi* $c_1 = 0$.

Ocenjevanje:

- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2+2 točki.*
- *Enačbe za konstante: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

5. (20) Dan naj bo sistem enačb

$$\begin{aligned} \ddot{x} + y &= \cos t \\ x + \ddot{y} &= \sin t \end{aligned}$$

z začetnimi pogoji $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ in $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

a. (10) Izračuanjte $\mathcal{L}x(s)$ in $\mathcal{L}y(s)$.

Rešitev: Po pravilih za Laplaceove transformacije odvodov sledi

$$\begin{aligned} s^2\mathcal{L}x(s) + \mathcal{L}y(s) &= \tfrac{s}{s^2+1} \\ \mathcal{L}x(s) + s^2\mathcal{L}y(s) &= \tfrac{1}{s^2+1}\,. \end{aligned}$$

Pomnožimo drugo enačbo s s^2 in odštejemo. Sledi

$$(1 - s^4)\mathcal{L}y(s) = \frac{s - s^2}{s^2 + 1}$$

ali

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{s}{(1 + s)(1 + s^2)^2}\,.$$

Podobno sledi

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{1 + s + s^2}{(1 + s)(1 + s^2)^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Pravila za transformacijo odvodov: 2 točki.*
- *Upoštvanje začetnih pogojev: 2 točki.*
- *Opazimo, da gre za sistem linearnih enačb: 2 točki.*
- *Rešujemo: 2 točki.*
- *Rešitvi: 2 točki.*

b. (10) Kot znano upoštevajte

$$\frac{1 + s + s^2}{(1 + s)(1 + s^2)^2} = \frac{1 - s}{4\,(s^2 + 1)} + \frac{s + 1}{2\,(s^2 + 1)^2} + \frac{1}{4(s + 1)}$$

in

$$\frac{s}{(1 + s)(1 + s^2)^2} = \frac{s - 1}{4\,(s^2 + 1)} + \frac{s + 1}{2\,(s^2 + 1)^2} - \frac{1}{4(s + 1)}$$

ter

$$(\sin t * \sin t)(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t) \quad \text{in} \quad (\sin t * \cos t)(t) = \frac{1}{2}t\sin t\,.$$

Poiščite funkciji $x(t)$ in $y(t)$.

Rešitev: Iz znanih enačb ugotovimo, da je

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)\right) = \frac{1}{(1 + s^2)^2}$$

in

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}t\sin t\right)(s) = \frac{s}{(1+s^2)^2}\,.$$

Preberemo, da je

$$x(t) = \frac{1}{4}(\sin t - \cos t) + \frac{1}{4}\left(t\sin t + \sin t - t\cos t\right) + \frac{1}{4}e^{-t}$$

in

$$y(t) = \frac{1}{4}(\cos t - \sin t) + \frac{1}{4}\left(t\sin t + \sin t - t\cos t\right) - \frac{1}{4}e^{-t}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Uporaba znanih konvolucij: 2 točki.*
- *Uporaba znanih razcepov: 2 točki.*
- *Inverz x: 2 točki.*
- *Inverz y: 2 točki.*
- *Rezultata: 2 točki.*