FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 4
Pisni izpit
31. avgust 2012

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $f(x)$ naj bo periodična s periodo 2π, na intervalu $[-\pi,\pi]$ pa naj bo dana z

$$f(x) = (\pi + x)(\pi - x)\,.$$

a. (10) Razvijte funkcijo v Fourierovo vrsto in navedite, v katerih točkah ta vrsta konvergira proti funkciji $f(x)$.

Rešitev: Najprej opazimo, da je funkcija soda, zato bo $b_n = 0$ za $n \geq 1$. Računamo

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4\pi^2}{3}\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - x^2)\,\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{4\cos(\pi n)}{n^2} \\
&= \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\,.
\end{aligned}$$

Fourierova vrsta za funkcijo $f(x)$ je

$$\frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2}\,.$$

Funkcija $f(x)$ je zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, poleg tega pa je $f(-\pi) = f(\pi)$. Fourierova vrsta zato konvergira za vse x proti funkciji $f(x)$.

Ocenjevanje:

- *Sodost: 2 točki.*
- *a_0: 2 točki.*
- *Integriranje per partes: 2 točki.*
- *a_n: 2 točki.*
- *Utemeljitev konvergence: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte vsoto vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)^2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} - \cdots$$

Utemeljite vaše korake.

Rešitev: V Fourierovo vrsto iz prvega dela vstavimo $x = \pi/2$. Opazimo, da je za lihe n $\cos(n\pi/2) = 0$, tako da v vrsti ostanejo samo členi za sode n. Če je $n = 2k$, je

$$\cos(n\pi/2) = \cos(k\pi) = (-1)^k .$$

Sledi

$$f(\pi/2) = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{(2k)^2} .$$

Sledi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \pi^2/4 - 2\pi^2/3\right) = \frac{\pi^2}{48} .$$

Ocenjevanje:

- *x: 2 točki.*
- *Lihi odpadejo: 2 točki.*
- *Vstavljanje za sode n: 2 točki.*
- *Vstavljanje in poenostavljanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Naj bo funkcija $F(x)$ definirana z

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xy} e^{-y^2} \, \mathrm{d}y \, .$$

a. (10) Utemeljite, da je

$$F'(x) = \frac{x}{2} F(x) \, .$$

Rešitev: Parcialni odvod po x izraza pod integralom je $y e^{xy} e^{-y^2}$. Za $|x| \leq a$ ta integral enakomerno konvergira, ker je majoriziran z funkcijo $|y| e^{a|y|} e^{-y^2}$. Zato lahko odvajamo pod znakom integrala. Računamo

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} y e^{xy} e^{-y^2} \, \mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{2} e^{xy} e^{-y^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{x}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{xy} e^{-y^2} \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{x}{2} F(x) \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Parcialni odvod: 2 točki.*
- *Enakomerna konvergenca na končnih intervalih: 2 točki.*
- *Per partes: 2 točki.*
- *Integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte funkcijo $F(x)$. Kot znano privzemite, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, \mathrm{d}y = \sqrt{\pi} \, .$$

Rešitev: Iz diferencialne enačbe sledi, da je

$$F(x) = c e^{x^2/4} \, .$$

Iz namiga sledi $F(0) = \sqrt{\pi}$, torej je $c = \sqrt{\pi}$.

Ocenjevanje:

- *Kaj z diferencialno enačbo: 2 točki.*
- *Prepis za integracijo: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Začetni pogoj: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

3. (20) Funkcija $y(t)$ naj za $t \geq 0$ ustreza enačbi

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{3t} + e^{-3t}\right) - 3\int_0^t y(u)e^{3(t-u)}\,\mathrm{d}u\,.$$

a. (10) Izračunajte Laplaceovo transformacijo funkcije $y(t)$ za $s > 3$.

Rešitev: Ugotovimo

$$\int_0^\infty e^{3t}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s-3}$$

in

$$\int_0^\infty e^{-3t}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s+3}\,.$$

Opazimo, da je integral na desni konvolucija funkcije $y(t)$ in funkcije e^{3t}. Uporabimo Laplacovo transformacijo na obeh straneh enačbe in sledi

$$\mathcal{L}y = \frac{s}{s^2-9} - 3\mathcal{L}y(s)\cdot\frac{1}{s-3}\,.$$

Izračunamo

$$(s-3)\mathcal{L}y = \frac{s}{s+3} - 3\mathcal{L}y$$

ali

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{1}{s+3}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prvi integral: 2 točki.*
- *Drugi integral: 2 točki.*
- *Združevanje: 2 točki.*
- *Poenostavitev: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Poiščite funkcijo $y(t)$.

Rešitev: Iz prvega dela preberemo, da je $y(t) = e^{-3t}$.

Ocenjevanje:

- *Rezultat: 10 točk.*

4. (20) Funkcija $f(t)$ naj bo dvakrat zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}$, taka, da je funkcija sama integrabilna in njen drugi odvod integrabilen. Poleg tega naj funkcija zadošča diferencialni enačbi

$$f'' - k^2 f = g(t)$$

za dano integrabilno funkcijo $g(t)$ in $k > 0$.

a. (10) Utemeljite, da velja

$$f(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{its} \mathcal{F}g(s)\, \mathrm{d}s}{s^2 + k^2}\,.$$

Rešitev: Po pravilih za računanje s Fourierovo transformacijo je

$$\mathcal{F}(f'')(s) = -s^2 \mathcal{F}f(s)\,.$$

Na obeh straneh v enačbi uporabimo Fourierovo transformacijo. Dobimo

$$-s^2\mathcal{F}f - k^2\mathcal{F}f = \mathcal{F}g\,.$$

Sledi

$$\mathcal{F}f(s) = -\frac{\mathcal{F}g(s)}{s^2 + k^2}\,.$$

Iz inverzne formule sledi, da je

$$f(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ist}\, \mathcal{F}g(s)\, \mathrm{d}s}{s^2 + k^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja, da transformiramo enačbo: 2 točki.*
- *Pravilo za odvode: 2 točki.*
- *Izračun $\mathcal{F}f$: 2 točki.*
- *Inverzna formula: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $g(t)$ dana z

$$g(t) = \begin{cases} 1/2 & \text{za } |t| \le 1 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izračunajte $f(t)$. Kot znano upoštevajte, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(as)\, \mathrm{d}s}{s(s^2 + k^2)} = \frac{|a|(1 - e^{-|a|/k})\pi}{ak^2}\,.$$

Upoštevajte še, da je

$$\cos(st)\sin(s) = \frac{1}{2}\left(\sin((t+1)s) - \sin((t-1)s)\right)\,.$$

Rešitev: Najprej ugotovimo

$$\mathcal{F}g(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin s}{s} .$$

Po inverzni formuli dobimo

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{its} \sin s \, \mathrm{d}s}{s(s^2+k^2)} .$$

Opazimo, da je funkcija pod integralom soda, tako da lahko e^{its} *nadomestimo z* $\cos(ts)$. *Sledi*

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ts) \sin s \, \mathrm{d}s}{s(s^2+k^2)} .$$

Upoštevamo namig, pri čemer opazimo, da bodo rezultati odvisni od predznakov $t+1$ *in* $t-1$. *Računamo ločeno. Za* $t > 1$ *sta oba predznaka pozitivna in sledi*

$$f(t) = -\frac{1}{4k^2} \left(e^{-(t-1)/k} - e^{-(t+1)/k} \right) .$$

Za $-1 < t < 1$ *je* $t+1$ *pozitiven,* $t-1$ *pa negativen. Dobimo*

$$f(t) = -\frac{1}{4k^2} \left(1 - e^{-(t+1)/k} + 1 - e^{-(1-t)/k} \right) .$$

Za $t < -1$ *sta oba predznaka negativna in dobimo*

$$f(t) = -\frac{1}{4k^2} \left(e^{-(-t-1)/k} - e^{-(t-1)/k} \right) .$$

Ocenjevanje:

- *Inverzna formula: 2 točki.*
- *Sodost: 2 točki.*
- *Prvi del namiga: 2 točki.*
- *Drugi del namiga: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Funkcija $I_0(x)$ naj bo za vse $x \in \mathbb{R}$ definirana kot

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos y} \, \mathrm{d}y \, .$$

a. (10) Izračunajte $x^2 I_0'' + x I_0' - x^2 I_0$.

Namig: Na pravem mestu napišite $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ *in integrirajte per partes.*

Rešitev: Izraz pod integralom je poljubnokrat zvezno parcialno odvedljiv. Ker je interval integriranja končen, lahko odvajamo pod znakom integrala poljubno mnogokrat. Sledi

$$I_0'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos y} \cos y \, \mathrm{d}y$$

in

$$I_0''(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos y} \cos^2 y \, \mathrm{d}y \, .$$

Pišimo $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$ *in sledi*

$$I_0''(x) = I_0(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos y} \sin^2 y \, \mathrm{d}y \, .$$

Drugi integral predelamo z integracijo per partes v

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos y} \sin^2 y \, \mathrm{d}y = \frac{1}{\pi} \left(- \frac{e^{x \cos y} \sin y}{x} \Big|_0^\pi + \frac{1}{x} \int_0^\pi e^{x \cos y} \cos y \, \mathrm{d}y \right) = \frac{1}{x} I_0'(x) \, .$$

Sledi

$$x^2 I_0'' + x I_0' - x^2 I_0 = x^2 (I_0(x) - \frac{1}{x} I_0'(x)) + x I_0'(x) - x^2 I_0(x) = 0 \, .$$

Ocenjevanje:

- *Utemeljitev odvajanja: 2 točki.*
- *Prvi odvod: 2 točki.*
- *Drugi odvod: 2 točki.*
- *Namig in per partes: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) S pomočjo povezave med funkcijama $\Gamma(x)$ in $\mathrm{B}(x, y)$ izračunajte

$$\int_0^\pi \cos^n y \, \mathrm{d}y$$

in razvijte funkcijo $I_0(x)$ v potenčno vrsto. Kot znano privzemite, da je

$$\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2k)!}{k! \cdot 2^{2k}} \cdot \sqrt{\pi} \, .$$

Rešitev: Za lihe n je integral enak 0. Uvedemo substitucijo $\sqrt{u} = \cos y$ za $y \in [0, \pi/2]$. Dobimo

$$\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = -\sin y \,\mathrm{d}y \qquad \text{ali} \qquad \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}\,\sqrt{1-u}}\,.$$

Računamo za $n = 2k$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos^n y \,\mathrm{d}y &= 2\int_0^{\pi/2} u^k \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}\,\sqrt{1-u}} \\
&= \int_0^1 u^{k-1/2}(1-u)^{-1/2}\,\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{B}(k+1/2, 1/2) \\
&= \frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(k+1)} \\
&= \frac{(2k)!\cdot\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{2^{2k}(k!)^2} \\
&= \frac{(2k)!\cdot\pi}{2^{2k}(k!)^2}\,.
\end{aligned}$$

Za razvoj v potenčno vrsto ugotovimo, da je

$$\begin{aligned}
I_0(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos y}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n \cos^n y}{n!}\,\mathrm{d}y \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^n y\,\mathrm{d}y \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{(2k)!}\cdot\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}\,.
\end{aligned}$$

Integrirali smo lahko členoma, ker vrsta za $e^{x\cos y}$ na $[0, \pi]$ konvergira enakomerno.

Ocenjevanje:

- *Povezava med Γ in B: 2 točki.*
- *Rezultat integrala: 2 točki.*
- *Vrsta za exponentno funkcijo: 2 točki.*
- *Integriranje členoma in utemeljitev: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*