

Izpit iz Matematike 3

Fakulteta za strojništvo

24. januar 2014

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Naj bo $g : u \mapsto g(u)$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija definirana na \mathbb{R} in naj bo

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}} g\left(\frac{y^2}{2x}\right)$$

za $x > 0$ in $y \in \mathbb{R}$. Najprej izrazite $F_{yy}(x, y) - 2F_x(x, y)$ z odvodi funkcije g .

Nato poiščite neko neničelno funkcijo g , da bo $F_{yy}(x, y) - 2F_x(x, y) = 0$ za vse $x > 0$ in $y \in \mathbb{R}$.

2. (20) Izračunajte stacionarne točke funkcije

$$f(x, y) = e^{-x^2+y^2} - x^2 + 4y^2$$

definirane na \mathbb{R}^2 in jih klasificirajte.

Poiščite možne vezane ekstreme funkcije f pri pogoju $x^2 - y^2 = 1$.

3. (20) Za $R > 0$ naj bo območje G presek krogle K_1 (s središčem $(0, 0, 0)$ in polmerom R), krogle K_2 (s središčem $(0, 0, R)$ in polmerom R) in prvega oktanta. Drugače zapisano

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Izračunajte integral

$$\int_G xy \, dx dy dz.$$

4. (20) Ploskev \mathcal{S} je podana s parametrizacijo

$$\vec{r}(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, u)$$

za $u \in [0, 1]$ in $v \in [0, \pi/4]$. Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ skozi ploskev \mathcal{S} (v vsaki točki ploskve izberemo normalo s pozitivno z koordinato).

5. (20) Za $h > 0$ in $R > 0$ naj bo G valj s polmerom R in višino h . Natančneje,

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq R^2, z \in [0, h]\}.$$

Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{F}(x, y, z) = (5x, -y^2, 2z^2)$ skozi plašč \mathcal{S} valja G (brez zgornje in spodnje osnovne ploskve). Normala naj kaže v vsaki točki plašča \mathcal{S} navzven.