

1. kolokvij iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

2. december 2015

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, vsaka je vredna 25 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj	

1. (25) Dana je linearna diferencialna enačba

$$x^2y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = 0 \quad (*)$$

za $x > 0$.

- (a) (3) Pokažite, da je $y_1(x) = x^2$ rešitev enačbe (*).
- (b) (15) Z nastavkom $y(x) = x^2u(x)$ prevedite enačbo (*) na enačbo $xu''(x) + 5u'(x) = 0$ in to enačbo z nastavkom $v(x) = u'(x)$ rešite.
- (c) (7) Zapišite splošno rešitev enačbe (*).

2. (25) Izračunajte splošno rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}y'(x) &= y(x) + 3z(x) + 4e^{-x} \\z'(x) &= 2y(x) + 2z(x) - 3e^{3x}.\end{aligned}$$

3. (25) Izračunajte splošno rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb

$$x'(t) = 3x(t) - 4y(t) + 4z(t)$$

$$y'(t) = y(t) + 2z(t)$$

$$z'(t) = -x(t) + 2y(t) + 3z(t).$$

Namig: Izpostavite $3 - \lambda$ v karakterističnem polinomu.

4. (25) Za $t > 0$ definirajmo

$$F(t) = \int_0^{t/2} \frac{1}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx.$$

(a) (10) Pokažite, da je $F(t) = \frac{\pi}{6}$ za vse $t > 0$.

Namig: $\sqrt{t^2 - x^2} = t\sqrt{1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2}$ in nato arcsin.

(b) (15) Z odvajanjem funkcije F na dva načina izračunajte integral

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{(\sqrt{1 - x^2})^3} dx.$$