

# 1. kolokvij iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

3. januar 2018

Ime in priimek: \_\_\_\_\_

Vpisna številka: \_\_\_\_\_

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Naloge so 4, vredne so zaporedoma 25, 30, 20, 25 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj	

1. (25) Funkciji  $y(t)$  in  $z(t)$  za  $t \geq 0$  zadoščata enačbama

$$\begin{aligned}y''(t) &= 2y(t) + z(t) + 4 \sin t \\z''(t) &= 6y(t) + z(t) + 8 \sin t\end{aligned}$$

in pogojem  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$  in  $z(0) = -1$ ,  $z'(0) = 3$ . Z uporabo Laplacove transformacije izračunajte funkciji  $y$  in  $z$ .

*Pomoč:*  $2s^5 + s^4 - s^3 + 7s^2 - 3s + 6 = (s^2 + 1)(s + 2)(2s^2 - 3s + 3)$ ,  
 $-s^5 + 3s^4 + 13s^3 + 11s^2 + 14s + 8 = (s^2 + 1)(s + 2)(-s^2 + 5s + 4)$

2. (a) (18) Dana je enačba

$$y'(x) - xy(x) = 4 \int_0^x y(t)e^{3(x-t)} dt$$

pri pogoju  $y(0) = 0$ . Označite  $Y(s) = \mathcal{L}(y(x))(s)$  in izračunajte  $Y(s)$ .

*Namig in pomoč: konvolucija; uporabite Laplaceovo transformacijo in rešite dobljeno diferencialno enačbo. Korake utemeljite.*

(b) (12) Naj bo  $f(x) = \cos(x)$ . Izračunajte  $(f * f)(x)$ .

*Namig: Lahko uporabite npr. Laplaceovo transformacijo, enakost  $s^2 = s^2 + 1 - 1$  in znano enakost  $\mathcal{L}(\frac{1}{2}(\sin x - x \cos x))(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$ .*

3. (20) Naj bo funkcija  $H(x)$  dana z

$$H(x) = \int_0^1 \frac{\sin(xy)}{\sqrt{1-y^2}} dy.$$

Pokažite, da je

$$H(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)! x^{2k-1}}{(2k-1)! \cdot \Gamma(k + \frac{1}{2})}.$$

*Namig:* Upoštevajte vrsto  $\sin(xy) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (xy)^{2k-1}}{(2k-1)!}$  in jo členoma integrirajte. Z uvedbo spremenljivke  $y^2 = u$  izrazite  $\int_0^1 \frac{y^{2k-1} dy}{\sqrt{1-y^2}}$  z Beta funkcijo.

4. (25) S pomočjo Taylorjevega razvoja zapišite funkcijo

$$I(x) = \int_0^{x^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$$

v obliki potenčne vrste. Nato s pomočjo primerne konvergenčnega kriterija ugotovite, za katere  $x \in \mathbb{R}$  dobljena vrsta konvergira.

Približno izračunajte tudi  $I(1)$  s pomočjo prvih treh neničelnih členov dobljene vrste in ocenite absolutno vrednost napake pri tem izračunu.