

## Izpit iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

5. junij 2015

Ime in priimek: \_\_\_\_\_

Vpisna številka: \_\_\_\_\_

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Naj bo

$$f(x) = \int_{-1}^1 e^{\frac{x(1-u)}{2}} (1+u) du.$$

(a) Pokažite, da je

$$f(x) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)(n+2)}.$$

*Namig:* V izračunu substitucija  $v = 1 - u$ .

(b) Izračunajte radij konvergence potenčne vrste iz točke (a) in pokažite, da je

$$xf''(x) + (3-x)f'(x) - f(x) = 0$$

na njenem konvergenčnem območju.

2. (20) Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x & ; x \in [0, 2] \\ 4 - x & ; x \in [2, 4] \end{cases}$$

Razvijte funkcijo  $f(x)$  v Fourierovo vrsto  $F(x)$  **po sinusih** na  $[0, 4]$  in skicirajte graf funkcije  $F(x)$  za vse  $x \in \mathbb{R}$ . V katerih realnih številih  $x$  funkcija  $F(x)$  ni odvedljiva?

3. (20) Izračunajte rešitev homogenega linearnega sistema diferencialnih enačb

$$y' = y + z,$$

$$z' = -y + 3z,$$

ki zadošča pogojevema  $y(0) = 2$  in  $z(0) = 1$ .

*Namig:* 1. možnost: prevedba na diferencialno enačbo 2.reda;

2.možnost: Laplaceova transformacija;

3. možnost: lastne vrednosti, lastni in korenski vektorji primerne matrike.

4. (20) Za  $x > 0$  naj bo

$$F(x) = \int_0^x (7x + 2 - 3t)f(t) dt,$$

kjer je  $f$  zvezno odvedljiva funkcija na  $[0, \infty)$ . Pokažite, da je za vse  $x > 0$

$$F''(x) = 11f(x) + (4x + 2)f'(x).$$

Poiščite vse takšne funkcije  $f$ , da bo  $F''(x) = 0$  za vse  $x > 0$ .

5. Rešite integralsko enačbo

$$y(x) + 5 \int_0^x y(t) e^{5(x-t)} dt = \frac{1}{2} (e^{5x} + e^{-5x})$$

za  $x \geq 0$ .

*Namig: konvolucija.*