FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 4

2. kolokvij

6. januar 2012

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Naloge so 4, vsaka ima dva dela, ki sta skupaj vredna 25 točk. Na razpolago imate 90 min.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. (25) Naj bo funkcija $F(x)$ dana kot integral s parametrom

$$F(x) = \int_0^\pi \cos\left(x \sin y - y\right)\, \mathrm{d}y\,.$$

a. (10) Pokažite, da je

$$F'(x) = -\int_0^\pi \cos\left(x \sin y - y\right)\left(x\cos y - 1\right)\cos y\, \mathrm{d}y\,.$$

Utemeljite korake.

Namig: Integrirajte per partes in "dvignite" $\sin y$.

Rešitev: Funkcija pod integralskim znakom je zvezno parcialno odvedljiva po x*, zato lahko odvajamo pod integralskim znakom. Dobimo*

$$F'(x) = -\int_0^\pi \sin(x \sin y - y)\sin y\, \mathrm{d}y\,.$$

Integriramo per partes

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \sin(x\sin y - y)\sin y = \\ = \ & \sin(x \sin y - y)\cos y\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos\left(x\sin y - y\right)\left(x\cos y - 1\right)\cos y\, \mathrm{d}y \\ = \ & -\int_0^\pi \cos\left(x\sin y - y\right)\left(x \cos y - 1\right)\cos y\, \mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

To je že željeni rezultat.

Ocenjevanje:

- *Utemeljitev, da lahko odvajamo: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Prvi korak per partes: 2 točki.*
- *Vstavljanje mej: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (15) Pokažite, da je

$$x^2 F''(x) + xF'(x) + (x^2 - 1)F(x) = 0\,.$$

Utemeljite korake.

Namig: Utemeljite, da je

$$\int_0^\pi \cos(x \sin y - y)(x\cos y - 1)\, \mathrm{d}y = 0\,.$$

Rešitev: Preverimo namig. Opazimo, da je drugi oklepaj odvod argumeta v kosinusu, zato je

$$\int_0^\pi \cos(x\sin y - y)(x\cos y - 1)\,\mathrm{d}y = \sin(x\sin y - y)\Big|_0^\pi = 0\,.$$

Funkcija pod integralskim znakom je dvakrat zvezno odvedljiva po argumentu, zato lahko dvakrat parcialno odvajamo po x pod integralskim znakom. Sledi

$$F''(x) = -\int_0^\pi \cos(x\sin y - y)\sin^2 y\,\mathrm{d}y\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned} & x^2F''(x) + xF'(x) + (x^2-1)F(x) = \\ = {} & \int_0^\pi \cos(x\sin y - y)\left(-x^2\sin^2 y - x(x\cos y - 1)\cos y + (x^2-1)\right)\,\mathrm{d}y \\ = {} & \int_0^\pi \cos(x\sin y - y)(x\cos y - 1)\,\mathrm{d}y \\ = {} & 0\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Utemeljitev za drugi odvod: 3 točke.*
- *Dvakratno odvajanje: 3 točke.*
- *Zbiranje členov: 3 točke.*
- *Utemeljitev namiga: 3 točke.*
- *Končni sklep: 3 točke.*

2. (25) Kot znano privzemite, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(xy)\,\mathrm{d}y}{1+y^2} = \pi e^{-|x|}\,.$$

Definirajte

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(xy)\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)^2}\,.$$

a. (15) Pokažite, da je

$$F'(x) = -\frac{\pi x}{2}\, e^{-|x|}\,.$$

Utemeljite korake.

Rešitev: Izraz pod integralom s parametrom, ki definira $F(x)$, je zvezno parcialno odvedljiva funkcija po x. Poleg tega integral enakomerno konvergira za vse x in tudi parcialni odvod enakomerno konvergira za vse x, Računamo z integracijo per partes

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\sin(xy)\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)^2} \\ &= -\left(-\frac{\sin(xy)}{2(1+y^2)}\bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{x}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(xy)\,\mathrm{d}y}{1+y^2}\right) \\ &= -\frac{x}{2}\cdot \pi e^{-|x|}\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Zvezna odvedljivost: 3 točke.*
- *Enakomerna konvergenca: 3 točke.*
- *Odvajanje pod integralskim znakom: 3 točke.*
- *Integracija per partes: 3 točke.*
- *Rezultat: 3 točke.*

b. (10) Izračunajte $F(x)$. Kot znano privzemite, da je $F(0) = \pi/2$.

Rešitev: Funkcija $F(x)$ je soda. Za $x > 0$ računamo

$$F(x) = F(0) + \int_0^x F'(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Sledi

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\int_0^x ue^{-u}\,\mathrm{d}u\,.$$

S parcialnim integriranjem sledi

$$F(x) = \frac{\pi}{2}\left(e^{-|x|} + |x|e^{-|x|}\right)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Osnovni izrek analize: 2 točki.*
- *Upoštevanje $F(0)$: 2 točki.*
- *Integracija per partes: 2 točki.*
- *Zbiranje členov: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (25) Gama in beta funkcija.

a. (15) Legendrova formula za gama funkcijo je

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Pokažite, da je

$$B(2x,2y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot B(x,y)\cdot B\left(x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma\left(x+y+\frac{1}{2}\right)}.$$

Rešitev: Zapišemo

$$\Gamma(2(x+y)) = \frac{2^{2(x+y)-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(x+y)\Gamma\left(x+y+\frac{1}{2}\right)$$

in

$$\Gamma(2x)\Gamma(2y) = \frac{2^{2(x+y)-1}}{2\pi}\cdot\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(y+\frac{1}{2}\right).$$

Sledi

$$\begin{aligned}
B(2x,2y) &= \frac{\Gamma(2x)\Gamma(2y)}{\Gamma(2(x+y))} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\cdot\frac{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(y+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+y+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot B(x,y)\cdot\frac{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(y+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(x+y+1)}\cdot\frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma\left(x+y+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot B(x,y)\cdot B\left(x+\frac{1}{2}, y+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma\left(x+y+\frac{1}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Uporaba Eulerjeve zveze: 3 točke.*
- *Krajšanje potenc: 3 točke.*
- *Krajšanje ostalih konstant: 3 točke.*
- *Množenje in deljenje z $\Gamma(x+y+1)$: 3 točke.*
- *Končni sklep: 3 točke.*

b. (10) Prepričajte se, da je za celo število $n \geq 1$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\frac{(2n)!}{4^n\,n!}.$$

Rešitev: Uporabimo zvezo $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Zapišemo

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

V števcu in imenovalcu vrinemo člene $2n, 2n-2, 2n-4, \ldots, 2$. *Opazimo, da je*

$$(2n) \cdot (2n-2) \cdots 2 = 2^n n(n-1)(n-2) \cdots 1 = 2^n\, n!\,.$$

Sledi

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot 2^n\, n!} = \sqrt{\pi}\, \frac{(2n)!}{4^n\, n!}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Lastnost gama funkcije: 2 točki.*
- *Večkratna uporaba: 2 točki.*
- *Vrinjanje členov: 2 točki.*
- *Zbiranje čleov: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

4. (25) Naj bo

$$\int_0^t \frac{f(u)\,\mathrm{d}u}{\sqrt{t-u}} = g(t)\,,$$

kjer je $g(t)$ znana funkcija, funkcijo $f(t)$ pa iščemo.

a. (15) Z uporabo Laplaceove transformacije pokažite, da velja

$$\frac{\mathcal{L}f(s)}{s} = \frac{1}{\pi}\mathcal{L}g(s)\cdot\mathcal{L}h(s)\,,$$

kjer je $h(t) = 1/\sqrt{t}$.

Rešitev: V integralu prepoznamo konvolucijo funkcije $f(t)$ in $h(x) = 1/\sqrt{t}$. Dobimo torej

$$\mathcal{L}f(s)\cdot\mathcal{L}h(s) = \mathcal{L}g(s)\,.$$

Računamo

$$\mathcal{L}h(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-ts}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{s}}\,.$$

Vemo, da je $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Sledi, da je

$$\frac{\mathcal{L}f(s)}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathcal{L}g(s)\,.$$

Obe strani delimo z $\sqrt{s}$ in dobimo

$$\frac{\mathcal{L}f(s)}{s} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\cdot\mathcal{L}g(s)\,.$$

Sledi

$$\frac{\mathcal{L}f(s)}{s} = \frac{\mathcal{L}g(s)\cdot\mathcal{L}h(s)}{\pi}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da gre za konvolucijo: 3 točke.*
- *Transformacije leve in desne strani: 3 točke.*
- *Integral za Laplaceovo transformacijo: 2 točki.*
- *Uporana gama funkcije: 3 točke.*
- *Ureditev in rezultat: 3 točke.*

b. (10) Najdite funkcijo $f(t)$, če je $g(t) = \sqrt{t}$.

Rešitev: Vemo, da je

$$\mathcal{L}g(s) = \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}\,.$$

Sledi, da je

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{s}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{s^{3/2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}\,,$$

torej

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{2s}\,.$$

Sledi, da je $f(t) = 1/2$.

Ocenjevanje:

- *Laplaceova transformacija* $g(t)$: *2 točki.*
- *Preračun za* $\mathcal{L}f$: *2 to*
  v cki.
- $\mathcal{L}f$: *2 točki.*
- *Obrat: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*