

1. kolokvij iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

6. januar 2017

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Naloge so 4, vsaka je vredna 25 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj	

1. Za $t > 0$ označimo

$$I(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx.$$

(a) (7) Pokažite, da $I(t)$ konvergira enakomerno na vsakem omejenem intervalu v $(0, \infty)$.

Pomoč: $|\sin x| \leq |x|$ za vse $x \in \mathbb{R}$ in primerjalni kriterij.

(b) (18) Z izračunom $I'(t)$ in uporabo nedoločenega integrala

$$\int e^{ax} \sin x dx = \frac{(a \sin x - \cos x)e^{ax}}{1 + a^2} + C_1$$

pokažite, da je $I(t) = -\arctan t + C$ za vse $t > 0$ in za neko realno število C . Z izračunom $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t)$ izračunajte še C . Vse korake natančno utemeljite.

2. (a) (10) Izračunajte

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{3s + 6}{s^2 + 3s} \right) (x).$$

Namig: parcialni ulomki.

(b) (15) Izračunajte konvolucijo

$$f = x * e^x * e^{-x}.$$

Namig: Najprej izračunajte $\mathcal{L}(f)(s)$ in uporabite metodo parcialnih ulomkov.

3. (25) Dana je integralska enačba

$$\int_0^x (x-t)y(t) dt = x^2(1 - e^{-x})$$

za $x \geq 0$. Pokažite, da je

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{2}{s} - \frac{2s^2}{(s+1)^3}$$

in izračunajte $y(x)$.

Namig in pomoč: konvolucija in

$$\frac{s^2}{(s+1)^3} = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3}.$$

4. (a) (8) Za katere $x \in \mathbb{R}$ vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n+3)}$$

konvergira absolutno, za katere konvergira pogojno in za katere divergira?

(b) (17) Zapišite funkcijo

$$I(x) = \int_0^x \arctan(t^2) dt$$

v obliki potenčne vrste. Zapišite, za katere $x \in \mathbb{R}$ dobljena vrsta konvergira in za katere divergira. S pomočjo prvih treh členov dobljene vrste izračunajte približek za $I(-1)$ in ocenite napako pri izračunu.