

## Izpit iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

6. februar 2015

Ime in priimek: \_\_\_\_\_

Vpisna številka: \_\_\_\_\_

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Naj bo funkcija  $f(x)$  definirana s potenčno vrsto

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n!)^2}.$$

Poiščite radij konvergence zgornje potenčne vrste in za vse  $x$  iz konvergenčnega območja izračunajte

$$xf''(x) - f(x).$$

2. (20) Funkcija  $f(x)$  naj bo periodična s periodo  $2\pi$  in na  $[-\pi, \pi]$  dana z

$$f(x) = \frac{1}{2} (e^{\mu x} + e^{-\mu x}),$$

kjer je  $\mu \in (0, 1)$ .

a. Razvijte  $f(x)$  v Fourierovo vrsto in utemeljite, da ta vrsta konvergira proti funkciji  $f(x)$  za vse  $x \in [-\pi, \pi]$ . Kot znano privzemite

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}(a \cos(bx) + b \sin(bx))}{a^2 + b^2}.$$

*Namig: sodost oz. lihost?*

b. Izračunajte vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2 + 1}.$$

*Namig:  $\mu = 1/\sqrt{2}$ .*

3. (20) Rešite linearno diferencialno enačbo

$$y'' - 5y' + 4y = e^{2x} \sin(2x)$$

pri pogojih  $y(0) = 1$  in  $y'(0) = 0$ .

4. (20) Izračunajte splošno rešitev linearnega sistema diferencialnih enačb

$$y' = 4y + 3z + 4e^{3x},$$

$$z' = -3y - 2z - 3e^{4x}.$$

5. (20) Za  $x > 0$  naj bo

$$F(x) = \int_x^{x^2} (3x - t)f(t) dt,$$

kjer je  $f$  zvezno odvedljiva funkcija na  $[0, \infty)$ . Pokažite, da je za vse  $x > 0$

$$F''(x) = (18x - 6x^2)f(x^2) - 5f(x) + (12x^3 - 4x^4)f'(x^2) - 2xf'(x).$$