

Izpit iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

6. februar 2020

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Zapišite splošno rešitev linearne diferencialne enačbe

$$y''' - 5y'' + 4y' = (12x - 1)e^x.$$

2. (20) Zapišite splošno rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb

$$x'(t) = 2x(t) - y(t) + z(t)$$

$$y'(t) = -x(t) + 4y(t) - z(t)$$

$$z'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t).$$

- 3.** Naj bo Γ Gama funkcija in B Beta funkcija.
(a) (11) Legendrova formula za Gama funkcijo je

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Pokažite, da je

$$B(2x, 2y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot B(x, y) \cdot B\left(x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\Gamma(x + y + 1)}{\Gamma\left(x + y + \frac{1}{2}\right)}.$$

- (b)** (9) Izpeljite, da je za vsa naravna števila n velja

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{4^n n!}.$$

4. (20) Pokažite, da funkcija

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos t) dt,$$

zadošča Besselovi diferencialni enačbi

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0.$$

Namig: V integralu $\int_0^\pi \sin(x \cos t) \cos t dt$ uporabite metodo per-partes.

5. (20) Dana je enačba

$$xy(x) + \int_0^x y(t)e^{3(x-t)} dt = 9x^2.$$

Označite $Y(s) = \mathcal{L}(y(x))(s)$ in izračunajte $Y(s)$.