

Izpit iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

6. junij 2016

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Funkcije $x(t)$, $y(t)$ in $z(t)$ zadoščajo sistemu enačb

$$\begin{aligned}x'(t) &= -x(t) + y(t) + z(t) \\y'(t) &= -12x(t) + 5y(t) + 12z(t) \\z'(t) &= 4x(t) - y(t) - 4z(t).\end{aligned}$$

Izračunajte splošno rešitev sistema enačb.

2. (20) Za $t > 0$ definirajmo

$$F(t) = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}t} \frac{1}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx.$$

(a) (8) Pokažite, da je $F(t) = \frac{\pi}{3}$ za vse $t > 0$.

Namig: $\sqrt{t^2 - x^2} = t\sqrt{1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2}$ in nato arcsin.

(b) (12) Z odvajanjem funkcije F na dva načina izračunajte integral

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(\sqrt{1 - x^2})^3} dx.$$

Namig: odvajanje funkcije s parametrom in uporaba (a) .

3. (20) Dana je enačba

$$xy(x) + \int_0^x y(t) \sin(x-t) dt = \sin x.$$

Označite $Y(s) = \mathcal{L}(y(x))(s)$ in izračunajte $Y(s)$.

Namig in pomoč: $\mathcal{L}(xy(x))(s) = -(\mathcal{L}(y(x))(s))'$, konvolucija in rešite dobljeno linearno diferencialno enačbo.

4. (20) Naj bo funkcija $f(x)$ definirana s potenčno vrsto

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n!)^2}.$$

Poiščite radij konvergence zgornje potenčne vrste in za vse x iz konvergenčnega območja izračunajte

$$xf''(x) - f(x).$$

5. (20) Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \in (-1, 0] \\ 2 & ; x \in [-2, -1] \end{cases}$$

Zapišite Fourierovo vrsto $F(x)$ funkcije $f(x)$ razvite le **po sinusih** na $(-2, -1) \cup (-1, 0)$ in skicirajte graf funkcije $F(x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$. V katerih točkah funkcija F ni zvezna? Zapišite ničle funkcije F .

Pomoč: Razširite funkcijo f do lihe funkcije na $[-2, 2]$.