

FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 4

Pisni izpit

8. junij 2012

Ime in priimek: _____

Vpisna št:

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Večje bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 5 in vsaka je vredna 20 točk, torej skupaj 100 točk.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $f(x)$ naj bo periodična s periodo 2π in na $[-\pi, \pi]$ dana z

$$f(x) = \frac{1}{2} (e^{\mu x} + e^{-\mu x}),$$

kjer je $\mu \in (0, 1)$.

a. (10) Razvijte $f(x)$ v Fourierovo vrsto in utemeljite, da ta vrsta konvergira proti funkciji $f(x)$ za vse $x \in [-\pi, \pi]$. Kot znano privzemite

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}(a \cos(bx) + b \sin(bx))}{a^2 + b^2}.$$

Rešitev: Najprej opazimo, da je funkcija soda, torej je $b_n = 0$ za vse $n \geq 1$.
Računamo

$$\begin{aligned} a_0 &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (e^{\mu x} + e^{-\mu x}) dx \\ &= \frac{1}{2\pi\mu} (e^{\mu x} - e^{-\mu x}) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi\mu} (e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}). \end{aligned}$$

Za $n \geq 1$ uporabimo znan integral iz besedila naloge. Računamo

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{\mu x} + e^{-\mu x}) \cos nx dx \\ &= \frac{e^{\mu x}(\mu \cos nx + n \sin nx) + e^{-\mu x}(-\mu \cos nx + n \sin nx)}{2\pi(\mu^2 + n^2)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{2\mu e^{\mu\pi} \cos n\pi - 2\mu e^{-\mu\pi} \cos n\pi}{2\pi(\mu^2 + n^2)} \\ &= \frac{\mu(-1)^n (e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi})}{\pi(\mu^2 + n^2)}. \end{aligned}$$

Sledi

$$a_n = \frac{\mu(-1)^n (e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi})}{\pi(\mu^2 + n^2)}.$$

Fourierova vrsta konvergira za vse $x \in [-\pi, \pi]$, ker je funkcija zvezna in zvezno odvedljiva in velja $f(x) = (f(x+) + f(x-))/2$.

Ocenjevanje:

- Sodost: 2 točki.
- a_0 : 2 točki.
- Integracija: 2 točki.

- a_n : 2 točki.
- Utemeljitev konvergence: 2 točki.

b. (10) Izračunajte vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2 + 1}.$$

Namig: $\mu = 1/\sqrt{2}$.

Rešitev: Velja

$$f(x) = \frac{e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}}{2\pi\mu} + \frac{\mu(e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi})}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{\mu^2 + n^2}.$$

Izberimo $x = 0$ in $\mu = 1/\sqrt{2}$. Zaradi konvergence vrste je

$$1 = \frac{e^{\pi/\sqrt{2}} - e^{-\pi/\sqrt{2}}}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2 + 1} \right).$$

Iz te enakosti izračunamo želeno vrsto.

Ocenjevanje:

- Izbira $x = 0$: 2 točki.
- Izbira $\mu = 1/\sqrt{2}$: 2 točki.
- Vstavljanje: 2 točki.
- Preoblikovanje izraza: 2 točki.
- Rezultat: 2 točki.

2. (20) Funkcija $F(x)$ naj bo za $x > 0$ dana kot integral s parametrom

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-y})e^{-xy}}{y} dy.$$

a. (10) Utemeljite, da za $x > 0$ velja

$$F'(x) = - \int_0^{\infty} (1 - e^{-y})e^{-xy} dy.$$

Rešitev: Formula sledi z odvajanjem po x pod integralskim znakom. Utemeljiti moramo le enakomerno konvergenco za vse $x \geq a > 0$ za vsak $a > 0$. Parcialni odvod izraza pod oklepajem je dominiran z e^{-ax} . Ker ta funkcija konvergira, lahko za $x \geq a$ odvajamo pod integralskim znakom.

Ocenjevanje:

- Parcialni odvod: 2 točki.
- Citiranje enakomerne konvergence: 2 točki.
- Dominiranost: 2 točki.
- Integral dominiranosti: 2 točki.
- Sklep: 2 točki.

b. (10) Izračunajte $F(x)$.

Rešitev: Ker je

$$F'(x) = - \int_0^{\infty} (1 - e^{-y})e^{-xy} dy,$$

z integriranjem dobimo za $x > 0$

$$F'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}.$$

Sledi

$$F(x) = -\log x + \log(x+1) + c$$

za neko konstanto c . Določiti moramo še konstanto c . Funkcija

$$\frac{1 - e^{-y}}{y}$$

je za $y \geq 0$ omejena z neko konstanto M , zato je

$$F(x) \leq M \int_0^{\infty} e^{-xy} dy = \frac{1}{x}.$$

Očitno je potem, da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0.$$

Opazimo, da je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-\log x + \log(1+x) + c) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log\left(\frac{1+x}{x}\right) + c = c.$$

Sledi $c = 0$.

Ocenjevanje:

- *Integriranje prvič: 2 točki.*
- *Integriranje drugič: 2 točki.*
- *Ideja, da je treba določiti konstanto: 2 točki.*
- *Ideja z limito: 2 točki.*
- *Izpeljava ideje z limito:*

3. (20) Kot znano privzemite

$$\mathcal{L}(\sin at)(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{in} \quad \mathcal{L}(\cos at)(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

a. (10) Izračunajte $\sin t * \cos 2t$ z uporabo Laplaceove transformacije.

Rešitev: Vemo, da je

$$\mathcal{L}(\sin t * \cos 2t)(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \cdot \frac{s}{s^2 + 4}.$$

Produkt razcepimo na parcialne ulomke in dobimo

$$\mathcal{L}(\sin t * \cos 2t)(s) = \frac{s}{3(s^2 + 1)} - \frac{s}{3(s^2 + 4)}.$$

Razberemo

$$\sin t * \cos 2t = \frac{1}{3} \cos t - \frac{1}{3} \cos 2t.$$

Ocenjevanje:

- Uporaba prve transformacije: 2 točki.
- Uporaba druge transformacije: 2 točki.
- Parcialni ulomki: 2 točki.
- Prva inverzija: 2 točki.
- Druga inverzija: 2 točki.

b. (10) Izračunajte

$$\sin t * \sin 2t * \sin 3t * \dots * \sin nt.$$

Upoštevajte, da je

$$\frac{1}{(s^2 + 1^2)} \cdot \frac{1}{(s^2 + 2^2)} \cdots \frac{1}{(s^2 + n^2)} = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{n-i+1} 2i^2}{(n+i)!(n-i)!(s^2 + i^2)}.$$

Rešitev: Označimo iskano konvolucijo z $f(t)$. Dobimo

$$\mathcal{L}f(s) = \prod_{i=1}^n \frac{i}{s^2 + i^2}.$$

Produkt na desni moramo razcepiti na parcialne ulomke, torej

$$\prod_{i=1}^n \frac{i}{s^2 + i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s^2 + i^2}.$$

Uporabimo razcep in dobimo

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{n-i+1} 2i^2}{(n+i)!(n-i)!} \sin(it).$$

Ocenjevanje:

- Uporaba transformacije: 2 točki.
- Parcialni ulomki: 2 točki.
- Parcialni ulomki nadaljevanje: 2 točki.
- Inverzija: 2 točki.
- Rezultat: 2 točki.

4. (20) Naj bo funkcija $f(t)$ dana z

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

a. (10) Izračunajte Fourierovo transformacijo $\mathcal{F}f$ funkcije $f(t)$.

Rešitev: Po formuli je

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-its} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-its} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{e^{-its}}{is} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-is} - e^{is}}{s} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2 \sin s}{s}. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- Formula: 2 točki.
- Vstavljanje: 2 točki.
- Meje: 2 točki.
- Integriranje in De Moivre: 2 točki.
- Rezultat: 2 točki.

b. (10) S pomočjo inverzne formule pokažite, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos s \cdot \sin s}{s} ds = \frac{\pi}{2}.$$

Namig: Upoštevajte sodost $\mathcal{F}f(s)$ in vstavite $t = 1$.

Rešitev: Funkcija $f(t)$ je odsekoma zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, zato je po inverzni formuli

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{its} \mathcal{F}f(s) ds.$$

Vstavimo $t = 1$. Fourierova transformacija je soda funkcija s , zato lahko e^{its} nadomestimo s $\cos(ts)$. Ker je

$$\frac{f(1+) + f(1-)}{2} = \frac{1}{2},$$

sledi

$$\frac{1}{2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos s \cdot \frac{2 \sin s}{s} ds.$$

Sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos s \cdot \sin s}{s} ds = \frac{\pi}{2}.$$

Ocenjevanje:

- Inverzna formula: 2 točki.
- Utemeljitev inverzne formule: 2 točki.
- $t = 1$: 2 točki.
- Vstavljanje: 2 točki.
- Rezultat: 2 točki.

5. (20) Naj bo funkcija $f(x)$ definirana s potenčno vrsto

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n!)^2}.$$

a. (10) Poiščite radij konvergence zgornje potenčne vrste.

Rešitev: Računamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0.$$

Potenčna vrsta konvergira za vse $x \in \mathbb{R}$.

Ocenjevanje:

- Kriterij: 2 točki.
- a_n : 2 točki.
- Kvocijent: 2 točki.
- Limita: 2 točki.
- Sklep: 2 točki.

b. (10) Pokažite, da je

$$xf''(x) - f(x) = 0$$

za vse $x \in \mathbb{R}$.

Rešitev: Ker potenčna vrsta povsod konvergira, jo lahko členoma odvajamo. Za $x = 0$ sta leva in desna stran enaki 0. Koefficient na levi pri potenci x^n za $n \geq 1$ je

$$(n+1)n \cdot \frac{n+1}{((n+1)!)^2} - \frac{n}{(n!)^2} = 0.$$

Trditev torej drži.

Ocenjevanje:

- Utemeljitev, da lahko členoma odvajamo: 2 točki.
- Utemeljitev, da ni konstantnega člana: 2 točki.
- Ideja s primerjanjem koefficientov: 2 točki.
- Pravi koefficient: 2 točki.
- Račun in sklep: 2 točki.