

Izpit iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

8. september 2017

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Zapišite splošno rešitev linearne diferencialne enačbe

$$y''' - y'' - 2y' = (x - 2)e^{3x}.$$

2. (20) Zapišite splošno rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb

$$x'(t) = x(t) + z(t)$$

$$y'(t) = x(t) + y(t)$$

$$z'(t) = 4y(t) - 2z(t).$$

Namig: $\lambda_1 = 2$.

3. (20) Dana je enačba

$$xy'(x) = \int_0^x y(t)e^{3(x-t)} dt.$$

Označite $Y(s) = \mathcal{L}(y(x))(s)$ in izračunajte $Y(s)$.

Namig in pomoč: $\mathcal{L}(xy(x))(s) = -(\mathcal{L}(y(x))(s))'$, formula za $(\mathcal{L}(y'(x))(s))$, konvolucija in rešite dobljeno diferencialno enačbo.

4. (a) (12) Pokažite, da je

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n(n-1) \cdots 2 \cdot 1}{a^{n+1}}$$

za vse $a > 0$ in $n \in \mathbb{N}$ (enakomerne konvergence integralov v izračunu vam ni potrebno utemeljevati).

Namig in pomoč: Najprej izračunajte integral $\int_0^{\infty} e^{-ax} dx$ za $a > 0$, odvedite po a in uporabite matematično indukcijo.

(b) (8) Naj bo $(u, v) \mapsto f(u, v)$ parcialno zvezno odvedljiva funkcija. Izračunajte odvod funkcije

$$F(x) = \int_{x-1}^{x^2-2x} f(3x-1, tx^2+2x) dt$$

(izrazite njen odvod s parcialnima odvodoma f_u in f_v funkcije f in s funkcijo f).

5. (a)(16) Ugotovite, kakšen je konvergenčni radij vrste

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$$

in izračunajte njeno vsoto.

(b) (4) Izračunajte vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2^n(n+2)}$$