

## Izpit iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

15. junij 2018

Ime in priimek: \_\_\_\_\_

Vpisna številka: \_\_\_\_\_

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Rešite linearno diferencialno enačbo

$$y'' - 5y' + 4y = e^{2x} \sin(2x)$$

pri pogojih  $y(0) = 1$  in  $y'(0) = 0$ .

2. (20) Izračunajte splošno rešitev linearnega sistema diferencialnih enačb

$$y' = 4y + 3z - 2e^{3x},$$

$$z' = -3y - 2z + 3e^{4x}.$$

3. (a) (12) Pokažite, da je

$$\int_0^1 t^x (\ln t)^k dt = \frac{(-1)^k \cdot k(k-1) \cdots 2 \cdot 1}{(x+1)^{k+1}}$$

za vse  $x \neq -1$  in  $k \in \mathbb{N}$  (enakomerne konvergence integralov v izračunu vam ni potrebno utemeljevati).

*Namig in pomoč:*  $(a^x)' = (a^x) \ln a$  za  $a > 0$ ,  $\int_0^1 t^x dt = \frac{1}{1+x}$  za  $x \neq -1$  in matematična indukcija.

(b) (8) Naj bo  $(u, v) \mapsto f(u, v)$  parcialno zvezno odvedljiva funkcija. Izračunajte odvod funkcije

$$F(x) = \int_{3x+2}^{-2x^2+4x} f(x^3 + tx, x^3) dt$$

(izrazite njen odvod s parcialnima odvodoma  $f_u$  in  $f_v$  funkcije  $f$  in s funkcijo  $f$ ).

4. (20) Dana je integralska enačba

$$y(x) - \int_0^x y(t) e^{-(x-t)} dt = 3x + 4 - 2e^{-x}$$

za  $x \in \mathbb{R}$ . Pokažite, da je

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{2s^2 + 7s + 3}{s^3}$$

za  $s > 1$  in zapišite rešitev  $y(x)$ .

*Namig: konvolucija.*

5. (20) Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; x \in [0, 2) \\ 4 - x & ; x \in [2, 4] \end{cases}$$

Razvijte funkcijo  $f$  v Fourierovo vrsto  $F$  **po kosinutih** na  $[0, 4]$  in skicirajte graf funkcije  $F$  na intervalu  $[-12, 12]$ . V katerih točkah funkcija  $F$  ni odvedljiva?