

## Izpit iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

16. junij 2017

Ime in priimek: \_\_\_\_\_

Vpisna številka: \_\_\_\_\_

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Zapišite splošno rešitev linearne diferencialne enačbe

$$y''' - 2y'' - 3y' = (x + 1)e^{-x}.$$

2. (a) (12) Pokažite, da je

$$\int_0^1 t^x (\ln t)^k dt = \frac{(-1)^k \cdot k(k-1) \cdots 2 \cdot 1}{(x+1)^{k+1}}$$

za vse  $x \neq -1$  in  $k \in \mathbb{N}$  (enakomerne konvergence integralov v izračunu vam ni potrebno utemeljevati).

*Namig in pomoč:*  $(a^x)' = (a^x) \ln a$  za  $a > 0$ ,  $\int_0^1 t^x dt = \frac{1}{1+x}$  za  $x \neq -1$  in matematična indukcija.

(b) (8) Naj bo  $(u, v) \mapsto f(u, v)$  parcialno zvezno odvedljiva funkcija. Odvajajte funkcijo

$$F(x) = \int_{5x-2}^{4x^2+3x} f(x^2 - tx, x^3) dt$$

(izrazite njen odvod s parcialnima odvodoma  $f_u$  in  $f_v$  funkcije  $f$  in s funkcijo  $f$ ).

3. (20) Funkciji  $y(t)$  in  $z(t)$  za  $t \geq 0$  zadoščata enačbama

$$\begin{aligned}y'(t) &= 2y(t) - z(t) + \sin t \\z'(t) &= 4y(t) - 2z(t) + \cos t\end{aligned}$$

in pogoje  $y(0) = 0$  in  $z(0) = 0$ . Izračunajte  $x(t)$  in  $y(t)$  (npr. z uporabo Laplaceove transformacije).

4. (20) Naj bo

$$f(x) = \int_{-1}^1 e^{\frac{x(1-u)}{2}} (1+u) du.$$

(a) Pokažite, da je

$$f(x) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)(n+2)}.$$

*Namig:* V izračunu substitucija  $v = 1 - u$ .

(b) Izračunajte radij konvergence potenčne vrste iz točke (a) in izračunajte

$$xf''(x) + (3-x)f'(x) - f(x)$$

na njenem konvergenčnem območju.

5. (20) Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; x \in [0, 2) \\ 4 - x & ; x \in [2, 4] \end{cases}$$

Razvijte funkcijo  $f(x)$  v Fourierovo vrsto  $F(x)$  **po sinusih** na  $[0, 4]$  in skicirajte graf funkcije  $F(x)$  za vse  $x \in \mathbb{R}$ . V katerih realnih številih  $x$  funkcija  $F(x)$  ni odvedljiva?