

2. kolokvij iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

17. januar 2019

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, vsaka je vredna 25 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj	

1. (25) Naj bo F soda funkcija definirana z

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(xy)}{(1+y^2)^2} dy$$

za $x \in \mathbb{R}$. Kot znano lahko uporabite, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(xy)}{1+y^2} dy = \pi e^{-|x|}.$$

(a) (13) Pokažite, da je

$$F'(x) = -\frac{\pi x}{2} e^{-|x|}.$$

Korake izračuna natančno utemeljite.

Namig za integriranje: per-partes

(b) (12) Izračunajte $F(x)$. Kot znano lahko upoštevate

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+y^2)^2} dy = \frac{\pi}{2}.$$

2. (a)(5) Za funkcijo $f(x) = e^x$ izračunajte konvolucijo $(f * f)(x)$

(b) (20) Poiščite funkcijo, ki zadošča enačbi

$$y'(x) + \int_0^x y(t)e^{2(x-t)} dt = x$$

pri pogoju $y(0) = 0$.

Namig: konvolucija, Laplace, parcialni ulomki.

3. (25) Za $t \geq 0$ je dan sistem linearnih diferencialnih enačb

$$y'(t) = 2y(t) - z(t) + \sin t$$

$$z'(t) = 4y(t) - 2z(t) + \cos t$$

pri pogojih $y(0) = 0$ in $z(0) = 0$.

(a) (13) Pokažite, da je

$$(\mathcal{L}y)(s) = \frac{2}{s^2(1+s^2)}, \quad (\mathcal{L}z)(s) = \frac{s^2 - 2s + 4}{s^2(1+s^2)}.$$

(b) (12) Izračunajte $y(t)$ in $z(t)$

4. (a) (17) Zapišite, za katera realna števila x vrsta $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^n$ konvergira in izračunajte njeno vsoto. Nato izračunajte še $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n}$.

Namig: $\int xs(x)dx$.

(b) (8) Zapišite integral

$$I(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

v obliki potenčne vrste in zapišite, za katera realna števila x ta vrsta konvergira.