

## Izpit iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

22. februar 2019

Ime in priimek: \_\_\_\_\_

Vpisna številka: \_\_\_\_\_

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. Za  $x > 1$  je dana homogena linearna diferencialna enačba drugega reda

$$(x^3 - x^2)y''(x) - x^2y'(x) + 2y(x) = 0.$$

- (2) Preverite, da je  $y_1(x) = x^2$  rešitev zgornje enačbe.
- (8) Z nastavkom  $y(x) = x^2u(x)$  prevedite zgornjo enačbo na enačbo  $(x^2 - x)u''(x) + (3x - 4)u'(x) = 0$ .
- (10) To enačbo z nastavkom  $v(x) = u'(x)$  prevedite na diferencialno enačbo z ločljivimi spremenljivkami, jo rešite z metodo parcialnih ulomkov in zapišite splošno rešitev prvotne enačbe.

2. (20) Zapišite splošno rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}y'(x) &= y(x) - 4z(x) + 4e^x \\z'(x) &= 2y(x) + 7z(x) - 3xe^{2x}.\end{aligned}$$

3. (20) Za  $t > 0$  definirajmo

$$F(t) = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}t} \frac{1}{\sqrt{t^2 - x^2}} dx.$$

(a) (8) Pokažite, da je  $F(t) = \frac{\pi}{3}$  ta vse  $t > 0$ .

*Namig:*  $\sqrt{t^2 - x^2} = t\sqrt{1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2}$

(b) (12) Z odvajanjem funkcije  $F$  na dva načina izračunajte integral

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(\sqrt{1 - x^2})^3} dx.$$

4. (a) (5) Izračunajte

$$\mathcal{L}((x + 1) \cos(2x))(s).$$

(b)(15) Dana je enačba

$$xy''(x) - \int_0^x y(t)e^{-x+t} dt = x^2 \quad \text{s pogojem} \quad y(0) = 1.$$

Označite  $Y(s) = \mathcal{L}(y(x))(s)$  in pokažite, da je

$$Y'(s) + \frac{2s^2 + 2s + 1}{s^2(s + 1)}Y(s) = \frac{s^3 - 2}{s^5}.$$

5. (a) (16) Zapišite konvergenčni interval vrste

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+1)x^n$$

in izračunajte njeno vsoto.

(b) (4) Izračunajte vsoto vrste

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(n+1)}{2^n}.$$