

Izpit iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

26. januar 2018

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Poiščite splošno rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb

$$y'(x) = y(x) + 3z(x) + 7e^{2x},$$

$$z'(x) = 2y(x) - 4z(x) + 6e^{-x}.$$

2. (a) (15) Dana je enačba

$$y'(x) - 2 \int_0^x y(t) \sin(x-t) dt = \sin x$$

pri pogoju $y(0) = 0$. Izračunajte $y(x)$.

Namig: konvolucija.

(b) (5) Izračunajte $\mathcal{L}(xe^x \cos x)(s)$.

3. (20) Za $a > 0$ in $b > 0$ sta definirana integrala

$$F(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{5} \cos^2 x + a \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{5a^2}},$$

$$G(b) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{b \cos^2 x + 2 \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2b}}.$$

Izračunajte integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\sqrt{5} \cos^2 x + 2 \sin^2 x)^2} dx.$$

Namig: Odvajajte F in G .

4. Naj bo Γ gama funkcija in B beta funkcija.
(a) (11) Legendrova formula za gama funkcijo je

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Pokažite, da je

$$B(2x, 2y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot B(x, y) \cdot B\left(x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma\left(x+y+\frac{1}{2}\right)}.$$

- (b) (9) Pokažite, da za vsa naravna števila n velja

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{4^n n!}.$$

5. (20) Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \in [0, 1] \\ 2 & ; x \in (1, 2] \end{cases}$$

Zapišite Fourierovo vrsto $F(x)$ funkcije $f(x)$. Skicirajte graf funkcije $F(x)$ na $[-4, 4]$.
Ali vrsta konvergira enakomerno na $[-4, 4]$?