

Izpit iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

28. avgust 2015

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. Funkcija $M(x)$ naj bo definirana s potenčno vrsto

$$M(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(4)_k},$$

kjer je $(4)_0 = 1$ in $(4)_k = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (4 + k - 1)$ za $k \geq 1$.

(a) (10) Poiščite konvergenčni radij zgornje potenčne vrste in izračunajte

$$xM''(x) + (4 - x)M'(x) - M(x).$$

na konvergenčnem območju.

(b) (10) Pokažite, da je

$$3 \int_0^1 e^{xt}(1-t)^2 dt = M(x).$$

Utemeljite korake v izračunu.

Namig in pomoč: Taylorjev razvoj za eksponentno funkcijo, z delno integracijo izpeljite

$$\int_0^1 t^k(1-t)^2 dt = \frac{k!}{3 \cdot (4)_k}.$$

2. (20) Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ 1 - x & ; x \in (0, 1] \\ x - 1 & ; x \in [1, 2] \end{cases}$$

Razvijte funkcijo $f(x)$ v Fourierovo vrsto $F(x)$ **po sinusih** na $[0, 2)$ in skicirajte graf funkcije $F(x)$ za vse $x \in \mathbb{R}$.

Opomba: Vrednost funkcije v eni točki ne vpliva na določeni integral.

3. (20) Zapišite splošno rešitev linearne diferencialne enačbe

$$y'' - 6y' + 9y = e^{2x} \sin(x).$$

4. Funkcija $F(x)$ je definirana kot integral s parametrom

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(xy)}{(1+y^2)^2} dy.$$

Pokažite, da je F soda funkcija in

$$F'(x) = -\frac{\pi x}{2} e^{-|x|}$$

in nato izračunajte $F(x)$. Utemeljite vse korake v izračunu.

Pomoč:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(xy)}{1+y^2} dy = \pi e^{-|x|}, \quad F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+y^2)^2} dy = \frac{\pi}{2}.$$

5. S pomočjo Laplaceove transformacije rešite integralsko enačbo

$$y(x) + 5 \int_0^x y(t) e^{5(x-t)} dt = \frac{1}{2} (e^{5x} + e^{-5x})$$

za $x \geq 0$.

Namig: konvolucija.