

Izpit iz Matematike 4

Fakulteta za strojništvo

29. avgust 2016

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 100 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Zapišite splošno rešitev linearne diferencialne enačbe

$$y'' - 4y = e^{-x} \cos(2x).$$

2. (20) Funkcije $x(t)$, $y(t)$ in $z(t)$ zadoščajo sistemu enačb

$$\begin{aligned}x'(t) &= 5x(t) - 12y(t) + 12z(t) \\y'(t) &= x(t) - y(t) + z(t) \\z'(t) &= -x(t) + 4y(t) - 4z(t).\end{aligned}$$

Izračunajte splošno rešitev sistema enačb.

3. (20) Dana je integralska enačba

$$y(x) - \int_0^x y(t) e^{-(x-t)} dt = 3x + 4 - 2e^{-x}$$

za $x \in \mathbb{R}$. Pokažite, da je

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{2s^2 + 7s + 3}{s^3}$$

za $s > 1$ in zapišite rešitev $y(x)$.

Namig: konvolucija.

4. (20) Pokažite, da funkcija

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos t) dt,$$

zadošča Besselovi diferencialni enačbi

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0.$$

Namig: V integralu $\int_0^\pi \sin(x \cos t) \cos t dt$ uporabite metodo per-partes.

5. (20) S pomočjo Taylorjevega razvoja zapišite funkcijo

$$I(x) = \int_0^{x^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$$

v obliki potenčne vrste za $x \in [0, 1]$. Pri tem korake v izračunu natančno utemeljite. Nato približno izračunajte $I(1)$ s pomočjo prvih treh neničelnih členov dobljene vrste in ocenite absolutno vrednost napake pri tem izračunu (*namig za oceno napake: Leibnitz*).